Math. P.
635
n
R

Math. P. 636 n

<36629117190011 S

<36629117190011

Bayer. Staatsbibliothek

III

Seinem
Freunde und Bruder J. W. Ritter
vom
Verfasser
am 13/8/1808.

R

Johann Friedrich Chriſtian Werneburg's

der Weltweisheit Doctors

rein wiſſenſchaftliche

Deduction oder Ableitung

der wahren Verhältniſſe je zweier von den verſchiedenen

trigonometriſchen Linien

zu einander,

direct in Theilen der einen von beiden

in allgemeinen analytiſchen Formeln;

frei

von aller Anwendung der unvollkommenen und unmathematiſchen

Differenzial- und Integral- oder FluxionsRechnung

eines Leibnitz oder Newton.

Nämlich

rein wiſſenſchaftliche Ableitung

nicht blos der wahren Verhältniſſe eines gegebenen Bogens zu ſeinem Sinus, Querſinus ꝛc. direct in Theilen des erſten, und umgekehrt: der wahren Verhältniſſe dieſer Linien zu jenem direct in Theilen einer der erſtern; folglich auch

des alleinigwahren Verhältniſſes des Durchmeſſers zum Umkreiße: — ſondern auch vorzüglich der wahren Verhältniſſe des n ſachen Bogens nnd des einſachen Bogens $\frac{u}{m}$ ten Theils Sinus, Querſinus, Tangente ꝛc. zu des einfachen Bogens Sinus, Querſinus, Tangente ꝛc. direct allein in Theilen einer der letztern Linien; folglich auch der Verhältniſſe der innerhalb eines Quadranten möglichen Sinuſſe Querſinuſſe, Tangenten ꝛc. zum Halbmeſſer direct blos in Theilen des letztern und umgekehrt, in bis jetzt noch nicht geahneten allgemeinen analytiſchen Formeln. —

VerlagsHandlung für die neueſte Litteratur 1060 (1800).

„Suchet nur, ſo werdet ihr finden.“ —

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

ruhmvollen, um die mathematiſchen Wiſſenſchaften
und deren Ausbreitung

ſehr verdienten Manne

Friedrich von Zach

Obriſtlieutnant und Director der SternWarte Seeberg bey Gotha,

ſetzet

dieſes öffentliche DenkMal

ſeiner

innigſten Hochachtung

der

Verfaſſer.

Vorrede.

Welcher unter den wiſſenſchaftlichen Bearbeitern der Geometrie, welcher nur eifrige Anfänger in derſelben, wähnte nicht beim anfänglichen, ſelbſt noch beim mehr vertrautern Umgange mit der reinen Mathematik, das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe des Cirkels in endlichen Zahlen darzuſtellen?! — Wie viele Hunderte brachten nicht, ſeit der Entſtehung dieſer Wiſſenſchaft, dieſer mit ſich ſelbſt im Widerſpruche ſtehenden Aufgabe ihre ganze LebensZeit oder doch wenigſtens einen ſehr großen Theil derſelben zum Opfer dar?! — Wie manche machten ſich durch unaufhörliches, ich drücke mich nicht zu hart aus, wenn ich ſage: die Erhabenheit ihrer Vernunft entheiligendes Nachgrübeln nach dieſem endlichen Verhältniſſe des Durchmeſſers zum Umkreiſe wirklich zu Bewohnern milder Stiftungen. — Wie manche wähnen ſolches noch jezt zu finden, gefunden zu haben, und — im Finden deſſelben begriffen zu ſeyn! Ja ſie träumen ſich wohl gar durch dieſen Fund eine ganz beſondere und eigene Gemeinſchaft mit einem Gott erlangt zu haben, der ihnen das größte unter den Geheimniſſen zu offenbaren, die beſondere Gnade und Gewogenheit erzeigte. Wie groß iſt doch die Täuſchung mancher Menſchen! — Wie laſſen ſie ſich von ihrer Phantaſie bethören, in was für einen Abgrund ſtürzen ſie ſich hinab, wenn ſie ſich fernerhin auf dieſem ſo ſchlüpferigen Pfade des Verderbens betreten laſſen. Mein Beſtreben ſey jezt, euch den Schleyer, durch welchen ihr beſtändig hindurch blicktet, vor euren Augen hinweg zu rücken und euren bloßen Augen die nackte Wahrheit darzulegen. Denn jenes eitle Streben nach einem endlichen oder

doch

doch beſtimmten Verhältniſſe des Durchmeſſers zum Umkreiſe des Cirkels hat würklich einen edlen Grund, kommt aus einer lautern Quelle, manchem zwar unbekannt: nämlich das durch Zufall gefundene bekannte durch unterſchiedliche unendliche Reihen gegebene Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe des Cirkels, oder die bekannten Quadraturen und Rectificationen des Cirkels, wenn ſie als wahr und richtig angenommen werden ſollen, ſynthetiſch a priori zu begründen, wiſſenſchaftlich zu erweiſen und ſyſtematiſch aus unumſtößlichen GrundSätzen abzuleiten; weil man nemlich bis auf den heutigen Tag eine reinwiſſenſchaftliche Begründung und Ableitung nirgends antrift, von keinem Bearbeiter dieſer Wiſſenſchaft nirgends vorfindet und beſtändig in dieſer HauptMaterie eine Lücke erkennt, — Obgleich ſich ein Archimedes, Eitokius, Appolonius Pergäus. Franziskus Vieta, Adrianus Romanus, Ludolph von Köln, Sharp, Machin, Lagny, Leibnitz und Andere ſich damit befaßt haben.

Das unvertilgbare reine, lautere Gefühl der Wahrheit, das zu allen Zeiten den Menſchen vom Irrthume abzuhalten bemüht iſt, die Vernunft, die beſtändig Zweifel in die Richtigkeit deſſen, was aus der Erfahrung für gewiß erkannt wird, ſo lange ſetzt, bis ſie ſich auf ihren ihr eigenthümlichen Weg durch ihre wie an einer Kette an einander gereiheten und auf richtigen, unumſtößlichen GrundSätzen gebaueten ſynthetiſchen Schlüſſe von der Wahrheit mit apodictiſcher Gewißheit überzeugt hat; — dieſe waren die TriebFedern zu dergleichen Unterſuchungen, während welchen ſich aber die Phantaſie ins Spiel miſchte, und die Menſchen beſtändig auf Abwege gerathen ließ.

Wie treffend macht nicht Hr. Prof. Büſch in Hamburg in ſeinem Verſuch einer Mathematik den Verfaſſern der neueſten Anweiſungen zur Geometrie folgenden ſehr gegründeten Vorwurf: „Welche von „denſelben beweißt wohl das bekannte Verhältniß „des Durchmeſſers zum Umkreiße des Cirkels? — Und „dennoch berufen ſie ſich ohne Unterlaß auf daſſelbe, „und gründen ihre Regeln zur Berechnung des Cir„kels und der runden Körper ohne Bedenken auf „daſſelbe“. — — Doch von dieſem Vorwurfe werde ich

durch dieſe Abhandlung die Wiſſenſchaft für die Zukunft gänzlich befreien.

Und wie oft wird dennoch von manchen auf ihrer Gewißheit in der Mathematik ſich nicht wenig dünkenden Mathematikern über die Uneinigkeit und Verſchiedenheit in den Meinungen der neuern Philoſophen, und der Art und Weiße, ihre Wiſſenſchaft wiſſenſchaftlich zu begründen, geſpöttelt und verächtliche SeitenBlicke gethan. Allein ſie ahnen nicht, daß eben ihrer Wiſſenſchaft auch eine große mächtige Reinigung und Sichtung von allem Ueberflüſſigen, Unvollkommenen, wie auch große Vereinfachung und richtige Eintheilung bevorſteht. —

Dieſes Vorwurfs wegen ſcheinen manche noch nicht mit unumſtößlicher Gewißheit überzeugt zu ſein, von der Unmöglichkeit und dem Widerſpruche, den Cirkel jemals genau quadriren zu können: das heißt, ſie zweifeln noch an der gänzlichen Unmöglichkeit, die in jedem wahrhaft noch ſo kleinen Momente oder Theilchen, beſtändig krumme und in allen ihren Theilen gleichweit vom MittelPunkte entfernten CirkelLinie, durch eine auch noch ſo kleine gerade, ich ſage gerade Linie in einem endlichen genau entſprechenden Verhältniſſe meſſen zu können, oder wohl richtiger, ſie zweifeln an der Richtigkeit der bekannten unendlichen Reihen. Allein wie kann man ſich ſo etwas nur in den Sinn kommen laſſen, ſo ganz und gar heterogene, ungleichartige Größen wie der CirkelQuadrante und ſein Halbmeſſer in einem endlichen Verhältniße mit einander vergleichen und gegenſeitig durch einander meſſen zu wollen, oder der CirkelQuadrant müßte aufhören krumme Linie zu ſein, da es erſter GrundSatz in der Mathematik iſt, daß nur Gleichartiges mit Gleichartigem im endlichen Verhältniße verglichen werden kann und muß. —

Ich will hier keinesweges unterſuchen, in wie weit ſie es noch ſind oder nicht*), ſondern ich werde mich begnügen, die Quelle einer ſolchen eitlen Hofnung als einen deutlichen Beweiß anzuführen, daß die Menſchheit ſich ſchlechterdings nicht mit einer bloßen empiriſchen Ge-

*) Denn ich zweifelte ja ſelbſt ſo lange an der Richtigkeit der bekannten unendlichen Reihen, bis ich mich apodiktiſch durch den weiter unten folgenden Beweis überzeugte.

Gewißheit von Etwas begnügt, ſondern auch unbedingt einen Beweiß a priori davon verlangt, weil ſie ſonſt immer noch, nach ihren DenkGeſetzen, wie billig, einen ſtarken Zweife in die Gewißheit der Wahrheit ſetzen muß.

Die bisher in der Erfahrung zwar für richtig erkannten, mehr erwähnten unendlichen Reihen wurden durch einen wahrhaft glücklichen Zufall, ich ſage glücklichen Zufall entdekt, indem die Mathematiker auf einen ſchnurſtracks aller ſonſt von ihnen ſo ſehr geprießenen mathematiſchen Beſtimmtheit, Schärfe und Conſequenz und Hypotheſenloßen in ihren Arbeiten entgegen, bey den krummlinigten Figuren ganz und gar ſeiner Natur nach nicht anwendbaren, und in Beziehung auf dieſen höchſt grundloſen, verwerflichen hypothetiſchen Satz baueten, der aber in der Anwendung auf geradlinigte Figuren der fruchtbarſte begründetſte und unentbehrlichſte iſt, ich meine, den ſogenannten pythagoriſchen LehrSatz, und annahmen, daß die Summe aus dem Quadrate des Differenzials (δx) vom Sinus x des Bogens α und dem Quadrate des Differenzials (δy) vom Querſinus y gleich ſei dem Quadrate des Differenzials ($\delta\alpha$) vom Bogen α, mithin, daß ein Bogen die Hypothenuße (denn das Differenzial eines CirkelBogens oder das noch ſo kleine Theilchen deſſelben iſt und bleibt auch ein Bogen (Etwas), oder iſt mit dem Differenzial vom Sinus x zugleich = o oder Nichts) und ſein Sinus und Querſinus die Catheten eines rechtwinklichten Dreyecks wären! ohe! — D. i. analytiſch ausgedrukt, ſie ſetzten $\delta\alpha^2 = \delta y^2 + \delta x^2$ und erhielten endlich $\delta\alpha = \delta x\ (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Nach fernerer Anwendung ihrer höchſt unvollkommenen Fluxions- oder Differenzial- und Integral-Rechnung, (die ſchon, da ſie auf ganz von aller mathematiſchen Schärfe entblößten, folglich falſchen Prämiſſen ruht, zu manchen FehlSchlüſſen verleitet hat, und nach ihren ihr eigenthümlichen Karacter und Regeln nicht anders, als zu lauter FehlSchlüſſen, a priori geurtheilt, verleiten muß, und wenn ihre durch ſie erhaltenen Reſultate ſelbſt Wahrheiten ſind, dieſes bloß einem höchſt glücklichen Zufall, — daß ein Fehler den andern wieder gut macht, zuzuſchreiben iſt,) fanden ſie zufälliger Weiße die richtigen, unendlichen Reihen. Nichts bürgte bei dieſem dem Herumtappen im Fin-

Finſtern gleichenden Suchen, dafür, daß man eben den durch die Annahme der ganz grundloßen unmathematiſchen Hypotheſe gemachten Fehler durch einen zweiten wieder gut machen würde, im Gegentheil wäre gerade eine noch größere Abirrung vom rechten Wege, oder von der Wahrheit zu erwarten geweſen, und dieſe daraus hervorgegangenen Reihen hätten nach ihren TrugSchlüſſen doch für die richtigen gelten müſſen. Hier iſt nicht der Ort, das ſchwache, unſtatthafte, doch künſtliche Gebäude der Differenzial- und Integral-Rechnung, oder der ſogenannten Rechnung des Unendlichen in ſeiner ganzen Unvollkommenheit und Grundloßigkeit darzuſtellen, hierzu finde ich in meine auf meine vieltheilige (Polynomial-) Formel geſtützten Rechnung des Vieltheiligen Gelegenheit genug.

Mein vorzüglichſter Zweck in dieſer Abhandlung iſt nun, jene in der Erfahrung als richtig befundenen unendlichen Reihen aus unumſtößlichen GrundSätzen oder Prämiſſen a priori abzuleiten und ihre Richtigkeit wiſſenſchaftlich zu beweiſen. Daß das zur Quadratur des Cirkels dienende Verhältniß des Halbmeſſers zum Quadranten in einer nach einem Geſetze ins Unendliche fortlaufenden Reihe gegeben ſein müſſe, ſieht man ſchon daraus ein, daß weil das kleinſte Theilchen des Cirkels annoch eine krumme in allen ihren Theilen gleich weit vom MittelPunkt entfernte Linie bleibt, auch jeder Bogen, als eine krummlinigte Größe, in Beziehung auf ſeinen Sinus, als geradlinigte Größe, eine ganz heterogene Größe iſt, wovon zwar jede durch Größen gleicher Art in endlichen Verhältniſſen gemeſſen werden können, und weil ſie heterogen, ſich entgegengeſetzt ſind, ſolche auch nur durch einen jedesmaligen Sprung ins Entgegengeſetzte aus dem Endlichen in das Unendliche als transcendentale Größen mit einander verglichen werden können. Ehe ich mich zur eigentlichen Materie begebe, ſind zuvörderſt einige Aufgaben in der rein analytiſch geradlinigten Trigonometrie zu lößen, welche uns zur GrundLage in unſeren eigentlichen Nachforſchungen dienen.

Unter den noch faßbaren ZahlenSyſtemen bediene ich mich nicht der unvollkommenen Dekadik, ſondern des allein vollkommenen TaunZahlenSyſtems (ZwölfZahlenSyſtems) deſſen alleinige Vollkommenheit ich bewieſen und aufgeſtellt habe, um auch hier conſequent zu verfahren.

Würde

Würde man gleich die bekannten, zur Quadratur und Rectification des Cirkels erforderlichen, unendlichen Reihen wiſſenſchaftlich geſucht und abgeleitet haben, hätte man dann ferner aus ſolchen, die von mir entwickelten Formeln, unmittelbar aus dem Halbmeſſer die Sinuſſe, Coſinuſſe, Tangenten und Cotangenten aller übrigen in einem Quadranten liegenden Bogen zu finden, hergeleitet, ſo hätte man ſich die Berechnung der Sinus-, Coſinus-, Tangenten- und Cotangenten-Tafeln und ihrer zugehörigen Logarithmen ſehr erleichtern können. —

Wahre Gelehrte, Vertraute der Wiſſenſchaften und Denker ſind nicht gewohnt, über eine Schrift abzuurtheilen und über die Möglichkeit der ſyſtematiſchen Auflöſung eines innigſt geſchürzten wiſſenſchaftlichen Knotens, ohne ihn gewaltſam zu zerhauen, im Voraus deswegen abzuſprechen, weil z. B. hier in der Gröſſen-Lehre das alleinige Verhältniß des Durchmeſſers zum Umkreiſe gründlich und wiſſenſchaftlich zu deduciren oder abzuleiten, einem um die GröſſenLehre in ſeinem ZeitAlter ſehr verdienten und berühmten Manne, einem Archimedes, Eutokius, Appolonius Pergäus, Franziſcus Vieta, Adrianus Romanus, Ludolph von Köln, Sharp, Machin, Lagny, Leibnitz und neuern GröſſenLehrern bis auf den heutigen Tag weder gelingen wollte, noch möglich ſchien und einfiel, (die vielmehr zu Zeiten mehr oder weniger bey ihrer Annäherung dazu höchſt unmathematiſch verfuhren). Man wiederholt es, ſolche Männer ſind nicht gewohnt im Voraus abzuſprechen, ehe und bevor ſie eine Schrift über eine ſo wichtige Materie ſelbſt vom Anfang bis zu Ende geleſen, ſtudirt und geprüft haben. —

Möchten ſich doch hinführo niemals Menſchen finden, welche ſich bethören laſſen, wenn ſie etwas nicht einſehen oder weniger in die höhern Forderungen an einer Wiſſenſchaft Eingeweihete seyn mögen, zu ſchreyen: „dieſer D—r iſt ein Narr, der ſchon wegen „ſeines alleinvollkommenen TaunZahlenSyſtems und deſſen verlangter allgemeiner Einführung verdiente, ins Narren-Haus geſchickt zu werden; geſchweige aber wegen der rein wiſſenſchaftlichen „Deduction des alleinig wahren Verhältniſſes des Durchmeſſers zum „Umkreiſe und dergleichen, der wegen dieſer Erfindung oder Ablei-

„tung

„tung verdiente, daß er mit taumtaun nartaun gekrönt würde“, „denn wie ihr deutlich ſeht, will er ja mehr leiſten können, als alle „verlebten und noch lebenden Mathematiker, die gewiß dieſes General„Problem der Mathematik, wenn ſich nicht auf der erſten An„ſicht ſogleich die Unmöglichkeit der Auflößung und Ableitung einſe„hen ließe, gelößt und ſo auch die wahre Teliosadik aufgeſtellt ha„ben würden. Welche Arroganz!!! —“ Möchten ſich ſolche zu ihrem eigenen Vortheil doch rathen zu laſſen, lieber ſich ganz ruhig und ſtille zu verhalten, als ſich durch Unkunde in einem mitleidigen Lichte darzuſtellen! —

Kein wahrer Weiſe wird ſagen und behaupten: daß irgend einer der, dem menſchlichen Verſtande bekannten wiſſenſchaftlichen Knoten, wie z. B. dieſer mathematiſche und jener philoſophiſche, das Verhäliniß des Subjects zum Objecte, weil keinem der aufgeſtandenen Mathematiker und Philoſophen die Auflöſung oder reinwiſſenſchaftliche Ableitung gelingen wollte, — auf eine nicht gewaltſame Weiſe unauflösbar ſey; — viel mehr wird er dem, der dieſes thut, zurufen: Quae te dementia cepit? —

Eben wenn vielleicht gewiſſe Academien der Wiſſenſchaften und andere frühere gelehrte Geſellſchaften ſtatt aller ehemaligen Bekanntmachung: „daß ſie keine CirkelQuadratur mehr annehmen“, einen ſehr anſehnlichen Preiß auf eine ſolche reinwiſſenſchaftliche Deduction, wie die nachfolgende ſich als die alleinige bewährt, geſetzt hätten, da man zu Zeiten über viel weniger erhebliche Materien PreißAufgaben vorlegte; ſo würden ſich nicht von Zeit zu Zeit und bis auf den heutigen Tag Leute finden, die da die Quadratur des Kreißes nämlich in endlichen Zahlen wollen gefunden haben, ohne zu wiſſen, was ſie damit gefunden hätten; ſo würde es nicht ſolche Schwärmer und SeelenKranke geben, die da wähnen, „das erſte hohe Geheimniß der Welt, das der Quadratur des Kreißes, „des Nachts im Schlafe durch eine beſondere gnädige übernatürliche „Eingebung und Offenbarung eines Gottes erhalten zu haben, ja da„durch mit Gott in einer beſondern Gemeinſchaft zu ſtehen, und das „ſie nur gleichen, des ewigen Heils Durſtigen ohne eine Entheiligung „zu befürchten, mittheilen dürfen“. — Eben wenn man nur für eine ſolche Ableitung geſorgt hätte; ſo würde man für die ganze Klaſſe

von

von angehenden MathematikVerſtändigen, ja ſelbſt für einen großen Theil der in die GröſſenLehre Eingeweiheten eine wahre heilſame SeelenMedicin für die Ewigkeit erfunden haben; — ſo würden ſich keine Leute finden, die zwey Dutzend Jahre, ja ihre ganze Lebenszeit, wie Käſtner und andere melden, auf die Entdeckung jenes endlichen Verhältniſſes unnütz und übel angewandt, die Tauſende für jenes vermeintliche Geheimniß verſchwendet haben. Denn dieſe Verſchwendung von Kräften, Zeit und Geld und der anhaltende Eifer gränzt bei den CirkelQuadrirern zunächſt an WahnWitz, und leider! fühlen ſolche Unglückliche, von denen man behelligt wird, freylich ihr Elend nicht ganz. Doch es mag alles dieſes dahingeſtellt ſein, es iſt nun genug für die Menſchen, daß für ſolche SeelenKranke in Zukunft eine UniverſalMedicin (medicina mentis universalis) vorhanden iſt, ſo daß es von jetzt an keinem angehenden Mathematiker mehr einfallen darf, dergleichen chimäriſche Nachſuchungen anzuſtellen, ohne ſich für den gröſten Thoren zu erklären. — O möchte man doch dieſe Schrift für eine ſolche heilſame SeelenMedicin erkennen und anpreißen, und ſie allen und jeden dergleichen SeelenKranken bey Anfällen und jedem Eingebildeten gegen eine mögliche Anſteckung empfehlen! — O möchte man doch nicht dieſe kräftige Sprache für Arroganz ohne ihres Gleichen auslegen, möchte man ſie doch für das halten, was ſie ſeyn ſoll und iſt, für die warme Sprache eines wahren MenſchenFreundes ohne alle Arroganz, der innigen Antheil an dem Unglücke ſeiner Nebenmenſchen nimmt, der nur hoch über den glücklichen Fund, den die Menſchheit ein Mal gethan hat, erfreut iſt, da er ſich nur als die MittelsPerſon betrachtet.

Der Verfaſſer.

Auf

Aufgabe. Den Sinus und Coſinus der Summe zweier oder mehrerer Bogen oder Winkel $\alpha + \beta$ aus den Sinußen und Coſinußen der beiden Bogen oder Winkel α und β zu finden.

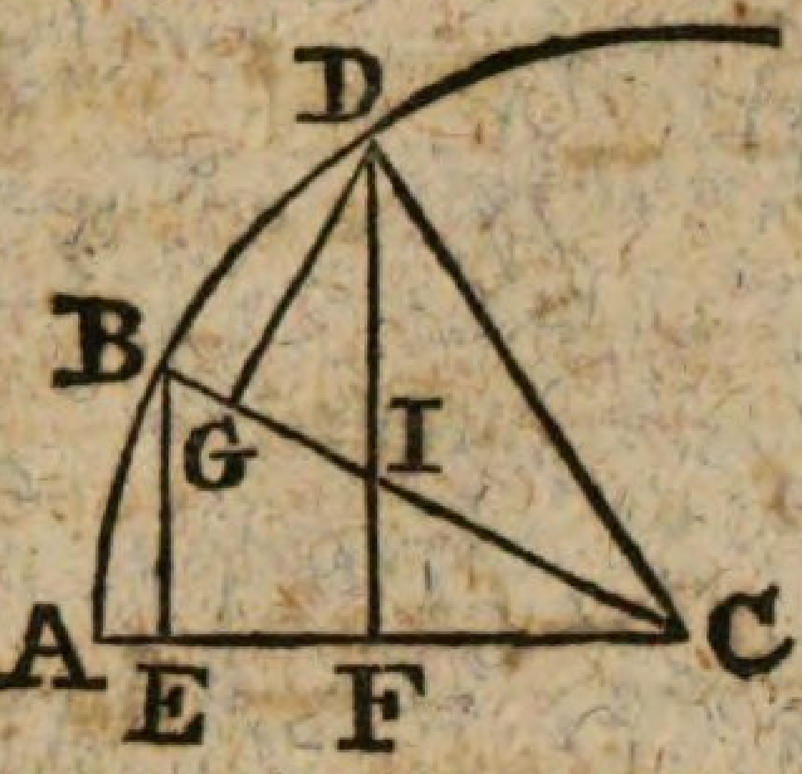

Fig. 1.

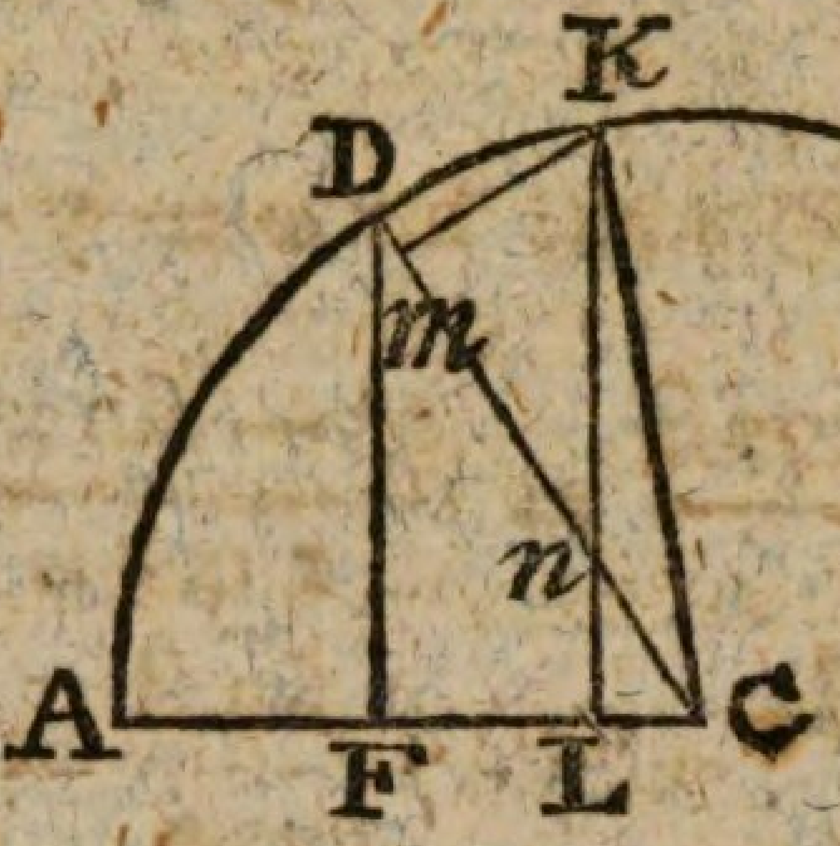

Fig. 2.

Für den Halbmeſſer $CA = CB = CD = CK = r$ ſind

in Fig. 1.

	Gegeben		Zu ſuchen.
Der Bogen	$AB = \alpha$	$BC = \beta$	$AD = \omega$
Sinus	$BE = \sin\alpha$	$DG = \sin\beta$	$DF = \sin\omega$
Coſinus	$CE = \cos\alpha$	$CG = \cos\beta$	$CE = \cos\omega$

In Fig. 2.

	Gegeben		Zu ſuchen
Der Bogen	$AD = \omega$	$DK = \gamma$	$AK = \omega + \gamma$
Sinus	$DF = \sin\omega$	$KM = \sin\gamma$	$KL = \sin(\omega + \gamma)$
Coſinus	$CF = \cos\omega$	$CM = \cos\gamma$	$CL = \cos(\omega + \gamma)$

Es wird verlangt der Sinus und Coſinus der Summe der beiden Bogen oder Winkel α und β; zweitens in der zweiten Figur der Sinus und Coſinus der Summe der beiden Bogen ω und $\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)$. Zuvörderſt in der erſten Figur.

So iſt AD die Summe der Bogen AB und BD, und nebſt dem Halbmeſſer $= r$ ſind gegeben: BE; CE; DG; CG, geſucht wird DF und CF. Die Größe DF beſteht aus zwei Stücken $DI = x$ und $IF = y$ ferner CG aus $GI = z$ und $CI = w$; welche einzeln zu ſuchen und dann zuſammen zu addiren ſind.

In Fig. 1. ſind die Dreyecke CBE; CIF; DIG; ähnlich: in Fig. 2 FDC; LNC; MKN. Alſo

$DI : DG = CI : CF = CB : CE$ und $EB : CE = GI : DG = IF : FC$

Nun iſt $\sin\beta : x = \cos\omega : w = \cos\alpha : r$, Alſo $\cos\alpha : r = \sin\beta : x$, mithin $x = \dfrac{r \sin\beta}{\cos\alpha}$. Eben ſo $\sin\beta : z = \cos\omega : y = \cos\alpha : \sin\alpha$ oder $\cos\alpha : \sin\alpha = \sin\beta : z$, folglich $z = \dfrac{\sin\beta \sin\alpha}{\cos\alpha}$

Alſo

Alſo auch $w = \cos\beta - \frac{\sin\beta \sin\alpha}{\cos\alpha}$, folglich das letzte Glied der Proportion $r : \sin\alpha = w : y$, mithin $y = \frac{\sin\alpha \cos\beta}{r} - \frac{\sin\alpha^2 \sin\beta}{r \cos\alpha}$ also die Summe $\sin\omega = y + x = \frac{r \sin\beta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2 \sin\beta}{r \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha \cos\beta}{r} = \frac{r^2 - \sin\alpha^2}{r \cos\alpha} \sin\beta + \frac{\sin\alpha \cos\beta}{r}$. Weil $\frac{r \sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{r^2 \sin\beta}{r \cos x}$, mithin $\frac{r \sin\beta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2 \sin\beta}{r \cos\alpha} = \frac{r^2 - \sin\alpha^2}{r \cos\alpha} \sin\beta = \frac{\cos\alpha \sin\beta}{r}$ Folglich $\sin\omega = [\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta] : r$

Das heißt: man multiplicire jedes Bogens (Winkels) Coſinus durch des andern Sinus, die Producte addire man und dividire dieſe Summe durch den Halbmeſſer. Der Quotient iſt der Sinus der Summe. Mithin iſt in der zweyten Figur $\sin(\omega + \gamma) = \frac{\sin\omega \cos\gamma + \cos\omega \sin\gamma}{r}$: denn die Operation und der Beweiß iſt ganz das nämliche wie bey der erſten Figur.

2) Den Coſin $\omega = \cos(\alpha + \beta)$ zu finden

Da $r^2 = \cos\beta^2 + \sin\beta^2$ und $r^2 \sin\omega^2 = \cos\alpha^2 \sin\beta^2 + \sin\alpha^2 \cos\beta^2 - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta$; ſo iſt, von der erſten die 2ten Gleichung abgezogen,

$$r^4 = r^2 \sin\beta^2 + r^2 \cos\beta^2$$
$$r^2 \sin\omega^2 = \cos\alpha^2 \sin\beta^2 - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta + \sin\alpha^2 \cos\beta^2$$
$$r^2 \cos\omega^2 = \sin\alpha^2 \sin\beta^2 - 2\cos\alpha \cos\beta \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha^2 \cos\beta^2$$
$$r \cos\omega = \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$\cos\omega = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{r}$. Weil hier anzunehmen iſt, daß da $\cos\alpha > \sin\beta$ und $\cos\beta > \sin\beta$, auch $\cos\alpha \cos\beta > \sin\alpha \sin\beta$

Oder da $r : \cos\alpha = w : \cos\omega$, $\cos\omega = \frac{w \cos\alpha}{r}$ und weil $w = \cos\beta - \frac{\sin\beta \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha}{\cos\alpha}$, ſo iſt

$\frac{\omega \cos \alpha}{r} = \frac{\cos\beta \cos\alpha - \text{ſin}\,\beta\, \text{ſin}\,\alpha}{r} = \cos \omega$. Hier braucht man gar nicht darauf zu achten, ob der Coſinus grö- ßer iſt als der Sinus und alsdann das Product aus den beiden Coſinußen größer ſei als das aus den bei- den Sinuſſen, ſondern es ergiebt ſich aus dieſer zwei- ten Operation, daß ſchlechterdings vor dem Producte aus den beiden Coſinußen das Product aus den bei- den Sinußen abgezogen werden muß, dieſe Diffe- renz durch den Halbmeſſer dividirt den Coſinus der Summe giebt.

Es iſt alſo auch $\cos(\omega+\gamma) = \frac{\cos\omega \cos\gamma - \text{ſin}\,\omega\ \text{ſin}\,\omega}{r}$

3) Wird nun $\omega = \alpha + \beta$ geſetzt, ſo iſt

$\text{ſin}\,\omega = \text{ſin}(\alpha+\beta)$ mithin $\text{ſin}(\omega+\gamma) = \text{ſin}(\alpha+\beta+\gamma)$ &c. Folglich

$\text{ſin}(\alpha+\beta+\gamma) = r^2 : [\cos\gamma.\ \cos\alpha.\ \text{ſin}\,\beta + \cos\beta\ \cos\gamma\ \text{ſin}\,\alpha + \cos\alpha\ \cos\beta\ \text{ſin}\,\gamma - \text{ſin}\,\alpha\ \text{ſin}\,\beta\ \text{ſin}\,\gamma]$

$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = [\cos\alpha.\ \cos\beta\ \cos\gamma - \text{ſin}\,\alpha\ \text{ſin}\,\beta\ \cos\gamma - \text{ſin}\,\alpha\ \text{ſin}\,\gamma\ \cos\beta - \text{ſin}\,\beta\ \text{ſin}\,\gamma\ \cos\alpha],\ r^2$

4) Setzt man nun in die beiden Gleichungen $\text{ſin}(\alpha+\beta) = \text{ſin}\,\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \text{ſin}\,\beta$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \text{ſin}\,\alpha\ \text{ſin}\,\beta$ $\alpha = \beta$ ſo iſt

$$\text{ſin}\,2\alpha = \frac{\text{ſin}\,\alpha\ \cos\alpha + \text{ſin}\,\alpha \cos\alpha}{r} = \frac{2\,\text{ſin}\,\alpha\ \cos\alpha}{r} = \frac{2\,\text{ſin}\,\alpha}{r}(r^2 - \text{ſin}\,\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos\alpha^2 - \text{ſin}\,\alpha^2}{r} = \frac{r^2 - 2\,\text{ſin}\,\alpha^2}{r} = \frac{2\cos\alpha - r^2}{r}$$

5) Setzt man ferner auch $\alpha = \beta = \gamma$ alſo $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+\alpha+\alpha = 3\alpha$ ſo iſt auch (3) $\text{ſin}\,3\alpha = \frac{3\cos\alpha^2\ \text{ſin}\,\alpha - \text{ſin}\,\alpha^3}{r^2}$ und $\cos 3\alpha = \frac{\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha\ \text{ſin}\,\alpha^2}{r}$

und da $\cos\alpha^2 = r^2 - \text{ſin}\,\alpha^2$, auch $\text{ſin}\,\alpha^2 = r^2 - \cos\alpha^2$

ſo iſt $\text{ſin}\,3\alpha = [3\cos\alpha^2 - \text{ſin}\,\alpha^2]\frac{\text{ſin}\,\alpha}{r^2} = \frac{3r^2\ \text{ſin}\,\alpha - 4\,\text{ſin}\,\alpha^3}{r^2}$

$$\cos 3\alpha = \frac{\cos\alpha}{r^2}\,[\cos\alpha^2 - 3\sin\alpha^2] = \frac{4\cos\alpha^3 - 3r^2\cos\alpha}{r^2}$$

$$= \frac{r^2 - 4\sin\alpha^2)}{r^2}\,(r^2 - \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

6) Es ſei ferner in $\sin(\omega+\gamma) = \frac{\cos\omega\sin\gamma + \cos\gamma\sin\omega}{r}$ und in $\cos(\omega+\gamma) = \frac{\cos\omega\cos\gamma - \sin\omega\sin\gamma}{r}$, $\omega = \gamma = 2\alpha$, ſo iſt

$\sin\omega = \sin\gamma = \sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{r}$ aus (4)

$\cos\omega = \cos\gamma = \cos 2\alpha = \frac{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}{r}$ aus (4);

mithin $\sin(\omega+\gamma) = \sin 4\alpha = \frac{2\cos 2\alpha.\sin 2\alpha}{r}$

$$= \frac{4.\cos\alpha^3\sin\alpha - 4.\sin\alpha^3\cos\alpha}{r^3} = 4\sin\alpha\,(r^2 - 2\sin\alpha^2)$$

$(r^2 - \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\,r^{-3}$; $\cos(\omega+\gamma) = \cos 4\alpha = \frac{(\cos 2\alpha)^2 - (\sin 2\alpha)^2}{r}$

$$= \frac{4\cos\alpha^4 - 4r^2\cos\alpha^2 + r^4 - 4r^2\cos\alpha^2 + 4\cos\alpha^4}{r^3}; \cos 4\alpha$$

$$= \frac{8\cos\alpha^4 - 8r^2\cos\alpha^2 + r^4}{r^3} = \frac{r^4 - 8r^2\sin\alpha^2 + 8\sin\alpha^4}{r^3}$$

7) Ferner ſie $\omega = 3\alpha$ und $\gamma = 2\alpha$ mithin $\omega+\gamma = 5\alpha$ und

$$\sin\omega+\gamma = \sin 5\alpha = \frac{\sin 3\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 3\alpha}{r} = \frac{r^2 - 2\sin\alpha^2}{r^2}$$

$$\frac{3r^2\sin\alpha - 4\sin\alpha^3}{r^2} + \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{r^2}.\frac{(r^2 - 4\sin\alpha^2)}{r^2}\cos\alpha,$$

$$= [3r^4\sin\alpha - 4\gamma^2\sin\alpha^3 - 6r^2\sin\alpha^3 + 8\sin\alpha^5 + 2r^4\sin\alpha - 8r^2\sin\alpha^3 - 2r^2\sin\alpha^3 + 8\sin\alpha^5]\,r^{-4}$$

$$= \frac{5r^4\sin\alpha - 18r^2\sin\alpha^3 - 14\sin\alpha^5}{r^4} = \sin 5\alpha$$

$$\cos\omega+\gamma = \cos 5\alpha = \frac{\cos 3\alpha\cos 2\alpha - \sin 3\alpha\sin 2\alpha}{r}$$

$$= \left[\frac{r^2 - 2\sin\alpha^2}{r^2}.\frac{r^2 - 4\sin\alpha^2}{r^2} - \frac{3r^2\sin\alpha - \sin\alpha^3}{r^2}.\frac{2\sin\alpha}{r^2}.\cos\alpha\right]$$

=

$$= \left[\frac{2\cos\alpha^2 - r^2}{r_2} \cdot \frac{4\cos\alpha^3 - 3r^2\cos\alpha}{r^2} - \frac{2r^2\cos\alpha + \cos\alpha^3}{r^2} \cdot \frac{2r^2 - 2\cos\alpha^2}{r^2}\right]; \; [14\cos\alpha^5 - 18\cos\alpha^3 r^2 + 5r^4\cos\alpha]\, r^{-4} = \cos 5\alpha.$$

8) Wird ferner angenommen $\omega = \gamma = 3\alpha$, ſo iſt $\omega + \gamma = 6\alpha$

$$\sin(\omega+\gamma) = \sin 6\alpha = \frac{2\sin 3\alpha . \cos 3\alpha}{r} = \left[\frac{6r^2\sin\alpha - 8\sin\alpha^3}{r^3}\right] . \left[\frac{r^2 - 4\sin\alpha^2}{r^2}\right][r^2\sin\alpha^2]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{6r^4\sin\alpha - 28r^2\sin\alpha^3 + 28\sin\alpha^5}{r^4}\right](r^2 - \sin\alpha^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos(\omega+\gamma) = \cos 6\alpha = \frac{\cos 3\alpha^2 - \sin 3\alpha^2}{r} = \frac{2\cos 3\alpha^2 - r^2}{r}.$$

Da nun $\cos 3\alpha = \frac{4\cos\alpha^3 - 3r^2\cos\alpha}{r^2}$, ſo iſt

$$\frac{2\cos 3\alpha^2 - r^2}{r} = \frac{28\cos\alpha^6 - 40r^2\cos\alpha^4 + 16r^4\cos\alpha^2 - r^6}{r^5} = \cos 6\alpha.$$

9) Wird auch noch $\omega = 4\alpha$ und $\gamma = 3\alpha$ ſo iſt $\sin(\omega+\gamma) = \sin 7\alpha$

$$\sin 7\alpha = \sin(3\alpha + 4\alpha) = \frac{\sin 3\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\alpha \cos 3\alpha}{r}$$

$$\left[\frac{3r^2\sin\alpha - 4\sin\alpha^3}{r^2}\right]\left[\frac{r^4 - 8r^2\sin\alpha^2 + 8\sin\alpha}{r^4}\right] + (r^2 - \sin\alpha^2). \left[\frac{4r^2\sin\alpha - 8\sin\alpha^3}{r^4}\right]\left[\frac{r^2 - 4\sin\alpha^2}{r^2}\right]$$

$$= \frac{7r^6\sin\alpha - 48r^4\sin\alpha^3 + 94r^2\sin\alpha^5 - 54\sin\alpha^7}{r^6}$$

$$\cos 7\alpha = \cos(3\alpha + 4\alpha) = \frac{\cos 3\alpha \cos 4\alpha - \sin 3\alpha \sin 4\alpha}{r}$$

$$= \left[\frac{r^4 - 8r^2\cos\alpha^2 + 8\sin\alpha^4}{r^3}\right]\left[\frac{4\cos\alpha^3 - 3r^2\cos\alpha}{r^3}\right] - \frac{3r^2 - 4\sin\alpha^2}{r^2} . \frac{r^2 - \cos\alpha^2}{r^2} . \frac{2\cos\alpha^3 - r\cos\alpha}{r^2};$$

$$\frac{54\cos\alpha^7 - 94r^2\cos\alpha^5 + 48r^4\cos\alpha^3 - 7r^6\cos\alpha}{r^6} = \cos 7\alpha$$

d) Es ſind alſo nach und nach in den vorhergehenden Sätzen die analytiſchen Functionen vom Sinus des einfachen Bogens oder Winkels für die ſieben Sinuße des ein bis ſieben fachen Bogens oder Winkels erhalten worden, die wir zur kürzern Ueberſicht unter einander ſtellen wollen. Wir haben uns nur beſtändig zu vergegenwärtigen, daß

$$\cos\alpha) = (r^2 - \text{ſin}\,\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = r - \tfrac{1}{2} r^{-1} (\text{ſin}\,\alpha)^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} r^{-3} (\text{ſin}\,\alpha)^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} r^{-5} (\text{ſin}\,\alpha)^6 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} r^{-7} (\text{ſin}\,\alpha)^8 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \varepsilon} r^{-9} (\text{ſin}\,\alpha)^{\varepsilon} \;\&c.$$

Wenn man in der bekannten BinomialFormel $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{r-4} b^4$ &c.

$a = r^2$, $b = -\text{ſin}\,\alpha^2$ und $n = \frac{1}{2}$ ſetzt

$$\text{ſin}\,\alpha = \text{ſin}\,\alpha$$

$$\text{ſin}\,3\alpha = 3\,\text{ſin}\,\alpha - 4 r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 \qquad \text{ſin}\,2\alpha = 2\,\text{ſin}\,\alpha - \frac{2}{2} r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 4} r^{-4} (\text{ſin}\,\alpha)^5 - \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} r^{-6} (\text{ſin}\,\alpha)^7 \;\&c.$$

$$\text{ſin}\,4\alpha = 4\,\text{ſin}\,\alpha - \frac{3 \cdot 4}{2} r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 - \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 4} r^{-4} (\text{ſin}\,\alpha)^5 - \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} r^{-6} (\text{ſin}\,\alpha)^7 \;\&c.$$

$$\text{ſin}\,5\alpha = 5\,\text{ſin}\,\alpha - 18 r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 - 14 r^{-4} (\text{ſin}\,\alpha)^5$$

$$\text{ſin}\,6\alpha = 6\,\text{ſin}\,\alpha - \frac{(48)}{2}. r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 - \frac{(276).}{2 \cdot 4} r^{-4} (\text{ſin}\,\alpha)^5 - \frac{(416)}{2 \cdot 4 \cdot 6}. r^{-6} (\text{ſin}\,\alpha)^7 \;\&c.$$

$$\text{ſin}\,7\alpha = 7\,\text{ſin}\,\alpha. - 48 r^{-2} (\text{ſin}\,\alpha)^3 - 94 r^{-4} (\text{ſin}\,\alpha)^5 - 54 r^{-6} (\text{ſin}\,\alpha)^7$$

e) Die

9) Die Differenz iſt 2, um welcher wächßt der Exponent der Potenz vom Sinus des einfachen Bogens, in jedem nächſt folgenden Gliede, ſowol in den endlichen als unendlichen Reihen zum Finden der Sinuße der ungeraden als geraden Vielfachen des Bogens α. Die auf einander folgenden Potenzen vom $\sin \alpha$ beginnen jedes Mal mit der erſten ungeraden, und laufen in jedem Ausdrucke nach den auf einander folgenden ungeraden Zahlen fort. Dieſes Geſetz wird uns in der Folge zum Wegweißer dienen.

10) Beiläufig wird nur folgendes angemerkt

Setzet man in $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4r^{-2} (\sin \alpha)^3$ nach und nach $\sin \alpha$ gleich $\pm r$; $\pm \frac{1}{2} r$; $\pm r\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\pm r\sqrt{\frac{3}{4}}$ ſo iſt 1. $\sin 3\alpha = 3r - 4r$ $\sin 3\alpha = -r$; $\sin 3\alpha = -3r + 4r = +r$; $\sin 3\alpha = \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}r$ $\sin 3\alpha = +r$; $\sin 3\alpha = -\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r = -r$; $\sin 3\alpha = \pm 3r\sqrt{\frac{1}{2}} \mp 2r\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm r\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sin 3\alpha = \pm 3r\sqrt{\frac{3}{4}} \mp 3r\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm 0$

Dieſe Vorarbeiten dienen nun zur GrundLage der Entwickelung aller nachfolgenden Aufgaben: Alſo

Von den Rectificationen und Quadraturen des Cirkels.

1) Soll würklich jeder Bogen durch ſeinem ihm zugeordneten Sinus in einem tranſcendentalen Verhältniſſe gemeſſen werden können, ſo muß es jedoch in einer tranſcendentalen Function von der unendlichſten Dimenſion, folglich in einer unendlichen ſich dem wahren Werthe im Unendlichen ganz nähernden Reihe geſchehen; ſo muß dieſe Function von der ∞ten Dimenſion, die nach einem Geſetze und einer beſtändigen Differenz fortſchreitenden Potenzen des Sinus, welche zwiſchen 1 und ∞ fallen, enthalten und ſich nicht durch Erheben zu einer ganzen oder gebrochenen Potenz oder durch irgend einen Kunſtgriff in eine algebraiſche Function verwandeln laſſen. — Ihr beſtändiger unveränderlicher Karacter iſt das ewige Fortſchreiten in das Unendliche. Weil nur gleichartigen Größen die Möglichkeit der Verwandlung in eine endliche d. i. algebraiſche oder analytiſche Function zukömmt, und der CirkelBogen als eine ewig krumme Linie und ſein Halbmeſſer als eine ewig gerade Linie ganz und gar ungleichartige d. i. tranſcendentale Größen in gegenſeitiger Beziehung ſind, die daher auch nur in einem tranſcendentalen Verhälniſſe mit einander ſtehen können.

2) Dies zugegeben, daß ein Bogen durch ſeinen Sinus, in einer tranſcendentalen Function d. i. in einer nach einem unveränderlichen Geſetze in einzelnen Gliedern fortlaufenden Potenzen-Reihe, gegeben ſei; ſo muß auch jeder andere Bogen durch ſeinen Sinus, folglich auch jedes Vielfache vom erſten Bogen d. i. jeder n Mal größere Bogen muß durch ſeinen Sinus nach einer ähnlichen nach ein und denſelben Geſetze fortſchreitenden Reihe von Potenzen des Sinus gegeben ſein.

3) Nun läßt ſich aber auch das Vielfache oder nfache des erſten Bogens finden, wenn man den durch die erſte Reihe gefundenen Bogen, oder eigentlich jene ſeinem Werthe entſprechende Reihe ſelbſt n Mal nimmt.

4) Allein in der zweiten Reihe, wo der n fache Bogen durch eine Function ſeines eigenen Sinus ſelbſt gegeben iſt, ließe ſich auch Statt dieſes Sinus d. i. des 2, 3, 4, 5, 6, 7fachen BogensSinus ſein Werth, durch eine analytiſche Function des Bogens Sinus gegeben, ſetzen und wenn alles gehörig geordnet iſt, und alles was in einerlei Potenz vom Sinus des einfachen Bogens multiplicirt worden war, zu einander addirt worden iſt, ſo wäre wiederum der n fache Bogen durch eine zweite Function des einfachen Bogens Sinus gegeben, die zwar der erſten nfachen nicht ganz ähnlich, aber doch gleich zu ſetzen wäre.

5) Setzt man nun wirklich beide Reihen, jene erſte, welche das n fache des einfachen Bogens ausdrückt, und dieſe zweite, die durch Subſtitution des Werthes des n fachen Bogens Sinus erhalten wurde, einander gleich und zieht eine von der andern ab, ſo muß natürlich alles aufgehen und nichts übrig bleiben.

6) Dies kann aber nur nach einer einzigen geſetzmäßigen Reihe möglich ſein, weil ſtets nur Eine einzige Reihe der Aufgabe auf das allervollkommenſte entſprechen kann, und alle übrigen in einem geringer vollkommenen Grade oder gar nicht.

7) Soll nun dieſes Letztere Statt finden, ſo muß auch alles, was in einerlei Potenz vom Sinus des einfachen Bogens multiplicirt iſt, ſich gegenſeitig aufheben und gleich Null ſein.

8) Mithin muß ſich hieraus jedes Mal der Werth eines beſtändigen, bisher noch unbeſtimmt geweßenen Coefficienten und ſo

mit

mit alle beſtimmt in Zahlen ergeben. Wird dann dieſer gefundene Werth jedes Coefficienten in die allgemein gültige Reihe geſetzt, ſo iſt das allgemeine Geſetz der Coefficienten beſtimmt, nach welchem jede Reihe fortſchreitet, die zum Finden jedweden Bogens aus ſeinem Sinus dient.

9) Zuvörderſt ehe wir an das Entwickeln ſelbſt ſchreiten können, müſſen wir auch das Geſetz kennen lernen, nach welchem die Potenzen vom Sinus eines Bogens auf einander folgen, die Differenz um welches die Exponenten der Potenzen wachſen oder abnehmen. Wir müſſen genau auch das erſte Glied und die darin vorkommende Potenz und ihren Exponenten wiſſen. Ueberhaupt wir müſſen das, was im Voraus zu wiſſen unumgänglich nothwendig iſt, aufſuchen.

Dieſes alles läßt ſich auf keinen andern Weg ausfindig machen, auf keine andere Weiße ableiten, als wenn wir die oben erhaltenen Gleichungen zum Finden der Sinuße des 1 bis 7fachen Bogens aus des einfachen Bogens Sinus der Muſterung paſſiren laſſen, über ſolche Reflectionen anſtellen.

ε) Wir finden, daß jede der Reihen mit der erſten Potenz des einfachen Bogens Sinus anfängt, und gerade ſo viele Male genommen iſt, als der einfache Bogen in dem Bogen, deſſen Sinus geſucht wird, enthalten iſt: d. h. daß in der Gleichung zum Finden des zweifachen Bogens Sinus die erſte Potenz des einfachen Bogens Sinus zwei Mal; zum Finden des dreifachen Bogens Sinus drei Mal die erſte Potenz des einfachen Bogens Sinus; zum Finden des vierfachen Bogens Sinus vier Mal die 1te Potenz des einfachen Bogens Sinus; zum Finden des fünffachen Bogens Sinus fünf Mal die 1te Potenz des einfachen Bogens Sinus; und folglich allgemein zum Finden des nfachen Bogens Sinus die erſte Potenz des einfachen Bogens Sinus n Mal genommen iſt.

ϙ) Wir finden ferner, daß vom jedesmaligen erſten Gliede an in jeder Reihe der Exponent der Potenz des einfachen Bogens Sinus in den nach einander folgenden Gliedern um die Differenz von 2 wächßt, indem er jedes Mal im erſten Gliede mit 1 anfängt und in folgender wachſenden Ordnung der ungeraden Zahlen 1, 3, 5,

7, 9, Q. 11 ꝛc. in jedem nächſtfolgenden Gliede fortläuft, ſo daß im Gliede 1ten 2ten 3ten 4ten 5ten.... r.ten r + 1ten der Potenz Expon. 2.1—1, 2.2—1, 2.3—1, 2.4—1, ... 2.r—1, 2.r—1 iſt zugleich zeigt es ſich aber auch, daß der Exponent der Potenz des Halbmeſſers = r vom erſten Gliede in folgender Ordnung fortſchreitet.

Glied	1tes	2tes	3tes	4tes	5tes...	rtes	r + 1tes
Exponent	2.1—2,	2.2—2,	2.3—2,	2.4—2,	2.5—2...	2 r—2,	2(r+1)—2

10) Oder wenn wir in der obigen Gleichungen abſtehen von dem Geſetze, nach welchem in jedem nachfolgenden Gliede die Coefficienten fortſchreiten, Statt ihrer ganz unbeſtimmte Werthe in den Gliedern, zu jeder Potenz als Factoren ſetzen, ſo erhalten wir folgende nach dem ſo eben entwickelten Geſetze des Fortſchreitens der Exponenten der Potenzen des einfachen Bogens Sinus = ſin α und des Halbmeſſers = r

$$\sin n.\alpha = n. \sin\alpha\, r^{-0} + b. (\sin\alpha)^3 r^{-2} + c. (\sin\alpha)^5 r^{-4} + d. (\sin\alpha)^7 r^{-6} + e(\sin\alpha)^9 r^{-8} + f(\sin\alpha)^{11} r^{-10} \,\&c. + x. r^{-2x+2} (\sin\alpha)^{2x-1} + (x+1) \sin\alpha^{2x+1} r^{-2x} \,\&c.$$

in welcher Reihe auch, von irgend einem Gliede an, alle nachfolgenden Coefficienten = 0 ſein können.

11) Zum Finden des Bogens aus ſeinem Sinus wird eine in as Unendliche ewig hinausgehende Reihe von Potenzen erfordert. Wenn daher den obigen Bedingungen und Forderungen ein Genüge geſchehen ſoll, ſo behaupte ich von dieſer Reihe, daß ſie 1) mit der nämlichen Potenz vom ſin α und dem Halbmeſſer = r wie jene Reihe zum Finden des nfachen Bogens Sinus anfangen müße; 2) daß erfordert werde, daß die übrigen Potenzen von ſin α und r nach eben dem nämlichen Geſetze und nach einerlei Differenz auf einander folgen und wachſen, wie in jener für das n fachen Bogens Sinus; und daß die Reihe eine unendliche ſein müſſe. 3) Das erſte Glied müſſe die erſte Potenz vom Sinus α ſein und keinen andern Coefficienten als Eins zum Factor haben, weil ſonſt keiner der übrigen Coefficienten ſich in Zahlen beſtimmen laſſen würde.

Beim erſten Blicke überſieht man ſogleich, daß das Geſetz der Coefficienten, welche in die gleiche Reihe von Potenzen von ſin α

mul-

multiplicirt werden, ein anderes hier beim Finden des n fachen Bogens aus ſeinem Sinus ſei.

12) Mit einem Worte ich behaupte der einzig mögliche in Rückſicht der Potenzen beſtimmte, in Rückſicht der Coefficienten aber ganz unbeſtimmte Ausdruck für den Bogen α aus ſeinem Sinus zu finden ſei

$$\alpha = \sin\alpha + \beta (\sin\alpha)^3 r^{-2} + \gamma (\sin\alpha)^5 r^{-4} + d (\sin\alpha)^7 r^{-6} \&c.$$

Hier ſind die Beweiße für meine Behauptungen.

13) Was den erſten Punkt betrift, nämlich: daß die Reihe zum Finden des Bogens mit eben der nämlichen Potenz des $\sin\alpha$ und r, wie jene zum Finden des n fachen Bogens Sinus anfangen müſſe, ſo führe ich dafür folgende Gründe an:

Geſetzt es fange z. B. das Glied der Reihe für den Bogen mit der Potenz ϱ des ſinus: α, in welcher irgend ein beſtändiger unveränderlicher Coefficient ω multiplicirt iſt, und r befinde ſich in der $-z$ Potenz als Factor dabei, alſo mit $r^{-z}\omega.(\sin\alpha)^\varrho$ an und die übrigen Glieder wären einſtweilen jedesMal $= x$, ſo wäre $\alpha = \omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + x$; mithin z. B. $2\alpha = 2\omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + 2x$ und auch $2\alpha = \omega r^{-z} (\sin 2\alpha)^\varrho + 2x$; ferner $3\alpha = 3 r^{-z}\omega. (\sin\alpha)^\varrho + 3x$ und auch $3\alpha = \omega r^{-z} (\sin 3\alpha)^\varrho + 3x$ und auch $3\alpha = \omega r^{-z} \sin 3\alpha)^\varrho + 3x$.

Nun ſind aber auch, wenn die oben erwähnte Abziehung und und Vernichtung noch Statt finden ſoll, die beiden rückſichtlichen Werthe von $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\, r^{-0} - (\sin\alpha)^3. r^{-2} \&c.$ und von $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\, r^{-0} - 4 (\sin\alpha)^3 r^{-2} \&c.$ zur Potenz ϱ erhoben in jene Gleichungen zu ſetzen und gleiche Werthe von 2α und 3α von einander abzuziehen, alſo $2\alpha - 2\alpha = 0$ $= 2\omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + 2x - \omega r^{-z} (\sin 2\alpha)^\varrho + 2x$ $= 2\omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + 2x - \omega 2^\varrho (\sin\alpha)^\varrho r^{-z} + 2x$. Und $0 = 3\alpha - 3\alpha = 3\omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + 3z - \omega (\sin 3\alpha)^\varrho r^{-z} - 3x$ $= 3\omega r^{-z} (\sin\alpha)^\varrho + 3x - \omega 3^\varrho (\sin\alpha)^\varrho r^{-z} - 3x$,

Mit

Mithin da das was in einerlei Potenz l von ſin α multiplicirt iſt gleich null geſetzt wird, ſo iſt $2.\omega - \omega\, 2^{\varrho} = 0$ und $3\,\omega - \omega\, 3^{\varrho} = 0$, alſo $2.\ \omega = 2^{\varrho}\,\omega$ und $3\ \omega = 3^{\varrho}\,\omega$, folglich $1 = 2^{\varrho - 1}$ und $1 = 3^{\varrho - 1}$. Mithin, wenn beide Gleichungen, wenn eine Vernichtung der Coefficienten Statt finden ſollen, ſo wäre $\varrho = 1$ und dann $1 = 2^{1-1} = 2^{\circ}$, $1 = 3^{1-1} = 3^{\circ}$.

14) Allein dieſes widerſpricht ja ſchnurſtracks der Vorausſetzung, daß der Exponent ϱ nicht gleich dem Exponenten der Potenz im erſten Gliede der Reihe zum Finden des n oder 2 oder 3 fachen Bogens Sinus ſei, dann ließe ſich aber auch keine Aufhebung und Vernichtung denken.

Zugleich iſt auch dies nach gerade der Vorausſetzung entgegen, daß ſich der Werth des erſten Coefficienten keinesweges in Zahlen ergiebt, folglich auch der übrigen Coefficienten, weil dieſer als Factor in der einen Gleichung zum Finden derſelben vorkommt.

Mit dieſem leuchtet auch noch hieraus ein, warum das erſte Glied der Reihe die erſte Potenz von ſin : α ohne allen Coefficienten ſein muß, weil nämlich ſonſt die Aufhebung nicht Statt hat.

15) Für das Zweite: Wenn die Reihe für den Bogen annoch mit der Potenz ϱ von ſin α beginnt und nach folgendem allgemeinen, dem in der Reihe für des nfachen Bogens Sinus nicht ähnlichen Geſetze fortſchreitet, nämlich wenn $\alpha = \omega\ (\sin\ \alpha)^{\varrho}\ r^{-z} + \psi\ (\sin\ \alpha)^{\varrho + \lambda}\ r^{-z-\lambda} + \varphi\ \sin \alpha^{\varrho + 3\lambda}\ r^{-z-3\lambda}$ &c.

ſo iſt $5\alpha = 5\,\omega\ (\sin \alpha)^{\varrho}\ r^{-z} + 5\,\psi\ \sin \alpha^{\varrho + \lambda}\ r^{-z-\lambda}$

$$+ 5\,\phi\, (\sin \alpha)^{\varrho + 3\lambda}\ r^{-z-3\lambda}\ \&c.$$

aber auch

$$5\alpha = \omega\ (\sin 5\alpha)^{\varrho}\ r^{-z} + \psi\ (\sin 5\alpha)^{\varrho + \lambda}\ r^{-z-\lambda}$$
$$+ \phi\ (\sin 5\,\alpha)^{\varrho + 3\lambda}\ r^{-z-3\lambda}\ \&c.$$

Folglich $+ 5\alpha = + 5\,\omega (\sin \alpha)^{\varrho}\ r^{-z} + 5\,\psi \sin \alpha^{\varrho + \lambda}\ r^{-z-\lambda}$ &c.

$$- 5\,\alpha = - \omega\, 5^{\varrho}\, (\sin \alpha)^{\varrho}\ r^{-z} + 18\,\omega\, 5^{\varrho - 1}\ \sin \alpha^{\varrho + 2}$$
$$r^{-z-2} - \psi\ 5^{\varrho + \lambda}\ \sin \alpha^{\varrho + \lambda}\ r^{-z-\lambda}\ \&c.$$

Hier kommt zuvörderſt der Fall vor, daß das durch Subſtitution erhaltene Glied $+ \omega.\ 18.\ 5^{\varrho - 1}\ \sin \alpha^{\varrho + 2}\ r^{-z-2}$ von kei-

nem

nem Gliede von gleicher Potenz $\varrho+2$ von α abgezogen werden kann, weil keine ſolche in der andern Reihe, von der abgezogen wird, vorhanden iſt. Ferner wird auch $5^{\varrho+1}\,\psi\,\sin\alpha^{\varrho+\lambda}\,r^{-z-\lambda}$ durch kein poſitives Glied in der erſten poſitiven Reihe gänzlich aufgehoben. Auch der Werth von ψ kann gar nicht in Zahlen beſtimmt werden, weil kein in Zahlen blos beſtimmtes oder beſtimmbares Glied vorhanden iſt, das einerlei Potenz $\varrho+\lambda$ von $\sin\alpha$ multiplicirt von obigen Gliede $(5-5^{\varrho+\lambda})\,\psi.\,\sin\alpha^{\varrho+\lambda}\,r^{-z-x}$ abzuziehen, oder darzu zu addiren wäre um den Werth von ψ beſtimmen zu können.

Handelt man aber der Vorausſetzung entgegen und nimt an, es ſei $\lambda=2$ und $3\lambda=4$ (wiederum Widerſpruch), ſo wäre zwar

$$5\psi+18\,5^{\varrho-1}\omega-5^{\varrho+2}\psi=0$$

und $\psi=\dfrac{18.\,5^{\varrho-1}.\,\omega}{5^{\varrho+2}-5}=\dfrac{5^{\varrho+2}-5^{\varrho+1}}{5^{\varrho+2}-5}$.

Dies widerſp icht aber der Vorausſetzung, daß die Differenz λ nicht gleich ſein ſoll der beſtändigen Differenz 2. Ueberdies läßt ſich ψ keinesweges ganz in Zahlen beſtimmen, weil ω darin unbeſtimmbar iſt, es müßte dann $\omega=1$. Noch unauflößlicher und unabziebarer ſind die folgenden, ſich in jeder Columne ergebenden Glieder, wenn die Differenz λ verſchieden von der Differenz 2 iſt.

Der Beweiß des dritten Punctes iſt ſchon in dem 1ſten und 2ten enthalten.

16) Weil ſich, wie ich zur Gnüge bewieſen zu haben glaube, die obigen Forderungen nicht befriedigen und die Aufgabe, daß die Subtraction der einen oben beſchriebenen tranſcendentalen Reihe zum Finden des vielfachen Bogens aus des einfachen Bogens Sinus von der andern durch die Subſtitution des Werthes des vielfachen Bogens Sinus Statt dieſem zu erhaltenden Reihe möglich ſei, daß ſich alles aufhebe, und daraus der Werth der Coefficienten hervorgehe, außerdem nicht lößen läßt: — ſo ſetze ich unbeſtimmt, es ſei, wie in der Reihe zum Finden des nfachen Bogens Sinus, der Bogen α durch eine ähnliche, jedoch beſtändig unendliche Reihe von Gliedern gegeben, worin die Potenzen von ſeinem Sinus nach gleichen Geſetzen fortſchreiten; die ebenfalls mit der erſten

Po-

Potenz vom Sinus des Bogens als erſtes Glied anfange, und die nachfolgenden Glieder aus alle den übrigen nach einander folgenden ungeraden Potenzen des Sinus beſtehen.

Nämlich es ſei unbeſtimmt in Rückſicht der Coefficienten der Bogen $= \frac{\alpha}{r} = \frac{\sin\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 \ldots\ldots + \varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \ldots\ldots + P\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^{2\varrho-1}$ &c. *)

wo die Coefficienten β, γ, δ, ε … P &c. beſtändige unveränderliche Größen bedeuten.

16) So iſt, wenn dieſer Ausdruck allgemein geltend angenommen wird der Bogen ω

$$\frac{\omega}{r} = \frac{\sin\omega}{r} + \beta\left(\frac{\sin\omega}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin\omega}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin\omega}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin\omega}{r}\right)^9 \text{ \&c.}$$

und wenn ω nach und nach gleich geſetzt wird 2α, 3α, 4α, 5α, 6α. 7α u. ſ. w.

ſo iſt:

$$1\alpha = r.\left[\frac{\sin\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$2\alpha = r.\left[\frac{\sin 2\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin 2\alpha}{r}\right)^3 + \gamma.\left(\frac{\sin 2\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin 2\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin 2\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

3α

*) Hier wird angenommen, daß wenn der Halbmeſſer $= r$, der Bogen $= \alpha$ folglich ſein Sinus $= \sin\alpha$ iſt, und da ſich alles gleichnamige in verſchiedenen Cirkeln zu einander verhält, wie die Halbmeſſer womit die Umkreiße beſchrieben wurden, ſo iſt für den Halbmeſſer $= 1$ der Bogen $= \frac{\alpha}{r}$, der Sinus $= \frac{\sin\alpha}{r}$, des n fachen Bogens Sinus $= \frac{\sin n\alpha}{r}$. Da der Sinus eines jeden geraden vielfachen Bogens nur in einer ins Unendliche gehenden Reihe aus des einfachen Bogens Sinus gefunden werden kann, ſo muß die Reihe, den Bogen aus ſeinen Sinus zu finden, auch eine unendliche ſein, weil ſonſt nach geſchehener Subſtitution der Werthe der Sinuße der geraden vielfachen Bogen keine gänzliche Aufhebung oder Vernichtung Statt fände. —

$$3\alpha = r.\left[\frac{\sin 3\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$4\alpha = r.\left[\frac{\sin 4\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin 4\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin 4\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin 4\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin 4\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$5\alpha = r.\left[\frac{\sin 5\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$n\alpha = r.\left[\frac{\sin n\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\sin n\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\sin n\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\sin n\alpha}{r}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{\sin n\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

Es iſt aber auch

$$2\alpha = r.\left[2\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right) + 2\beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right) + 2\gamma\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + 2\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + 2\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$3\alpha = r.\left[3\cdot\frac{\sin\alpha}{r} + 3\beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + 3\gamma\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + 3\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + 3\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right)$$

$$4\alpha = r.\left[4\frac{\sin\alpha}{r} + 4\beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + 4\gamma\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + 4\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + 4\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$5\alpha = r.\left[5\frac{\sin\alpha}{r} + 5\beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + 5\gamma.\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^5 + 5\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + 5\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c.}\right]$$

$$n\alpha = r\left[n\frac{\sin\alpha}{r} + n\beta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^3 + n\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + n\delta\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^7 + n\varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^9 \text{ \&c}\right]$$

Mit-

Mithin, (ich will unter allen andern möglichen Vernichtungen und Aufhebungen nur zwei leicht zu entwickelnde anführen), wenn Gleiches von Gleichen ſubtrachirt wird

$$18)\ 0 = 3\alpha - 3\alpha = r.\Big[3\frac{\sin\alpha}{r} + 3\beta(\sin\alpha)^3 r^{-3} + 3\gamma(\sin\alpha)^5 r^{-5} + 3\delta(\sin\alpha)^7 r^{-7} + 3\varepsilon(\sin\alpha)^9 r^{-9}\ \&c.$$
$$- (\sin 3\alpha) r^{-1} - \beta(\sin 3\alpha)^3 r^{-3} - \gamma(\sin 3\alpha)^5 r^{-5} - \delta(\sin 3\alpha)^7 r^{-7} - \varepsilon(\sin 3\alpha)^9 r^{-9}\ \&c.\Big]$$

$$0 = 5\alpha - 5\alpha = r.\Big[5(\sin\alpha) r^{-1} + 5\beta(\sin\alpha)^3 r^{-3} + 5\gamma(\sin\alpha)^5 r^{-5} + 5\delta(\sin\alpha)^7 r^{-7} + 5\varepsilon(\sin\alpha)^9 r^{-9}\ \&c.$$
$$- (\sin 5)\alpha) r^{-1} - \beta(\sin 5\alpha)^3 r^{-3} - \gamma(\sin 5\alpha)^5 r^{-5} - \delta(\sin 5\alpha)^7 r^{-7} - \varepsilon(\sin 5\alpha)^9 r^{-9}\ \&c.\Big]$$

Es iſt aber oben $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4 r^{-2}(\sin\alpha)^3$ mithin $\frac{\sin 3\alpha}{r} = 3(\sin\alpha) r^{-1} - 4 r^{-3} \sin\alpha^3$ und

$\sin 5\alpha = 5.\sin\alpha - 18 r^{-2}(\sin\alpha)^3 + 14 r^{-4}(\sin\alpha)^5$ folglich $(\sin 5\alpha) r^{-1} = 5(\sin\alpha) r^{-1} - 18(\sin\alpha)^3 r^{-3} + 14(\sin\alpha)^5 r^{-5}$

Die beiden rückſichtlichen Werthe von $\frac{\sin 3\alpha}{r}$ und $\frac{\sin 5\alpha}{r}$ ſetze man jezt Statt ihrer und ihrer Potenzen in den beiden rückſichtlichen Gleichungen und man erhält in jeder Gleichung die nämlichen beſtändigen Werthe der Coefficienten.

Zuvörderſt wollen wir $(\sin 3\alpha)r^{-1} = 3(\sin\alpha)r^{-1}\ 4(\sin\alpha)^3 r^{-3}$ und $(\sin 5\alpha)r^{-1} = 5(\sin\alpha)r^{-1} - 18(\sin\alpha)r^{-3} + 14(\sin\alpha)r^{-5}$ in die 3te, 5te, 7te und 9te Potenz erheben.

Um uns aber das Geſchäfte zu erleichtern, wollen wir $\frac{\sin\alpha}{r} = a$ mithin $(\sin\alpha)^3 r^{-3} = a^3$ $\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^n = a^n$ ſetzen.

Folglich iſt dann $(\sin 3\alpha)r^{-1} = 3a - 4a^3$ und $(\sin 5\alpha) r^{-1} = 5a - 18a^3 + 14a^5$. Alſo iſt

$$0 = \frac{3\alpha}{r} - \frac{3\alpha}{r} = 3a + 3\beta a^3 + 3\gamma a^5 + 3\delta a^7 + 3\varepsilon a^9\ \&c.$$
$$- (3a - 4a^3)^1 - \beta.\ (3a - 4a^3)^3 - \gamma.\ (3a - 4a^3)^5 - \delta.\ (3a - 4a^3)^7 - \varepsilon.\ (3a - 4a^3)^9\ \&c.$$

Und $0 = \frac{5\alpha}{r} - \frac{5\alpha}{r} = 5a + 5\beta a^3 + 5\gamma a^5 + 5\delta a^7 + 5\varepsilon a^9$ &c.

$-(5a - 18a^3 + 14a^5) - \beta(5a - 18a^3 + 14a^5)^3$
$-\gamma(5a - 18a^3 + 14a^5)^5 - \delta(5a - 18a^3 + 14a^5)^7$
$-\varepsilon(5a - 18a^3 + 14a^5)^9$ &c.

15) Zuvörderſt die Potenzen 3, 5, 7, 9 &c. von $3a - 4a^3$ alsdann dieſe von $(5a - 18a^3 + 14a^5)$.

$3a - 4a^3$
$3a - 4a^3$

$9a^2 - 20a^4 + 14a^6$
$3a - 4a^3$

$23a^3 - 60a^5 + 40a^7$
$\quad - 30a^5 + 80a^7 - 54a^9$

$23a^3 - 90a^5 + 100a^7 - 54a^9$
$9a^2 - 20a^4 + 16a^6$

$183a^5 - 690a^7 + 900a^9$ &c.
$\quad - 460a^7 + 1600a^9$ &c.
$\quad + 300a^9$ &c.

$183a^5 - \varrho 30a^7 + 2600a^9$ &c.
$9a^2 - 20a^4$ &c.

$1323a^7 - 8530a^9$ &c.
$\quad - 3460a^9$

$1323a^7 - \varrho 990a^9$ &c.
$9a^2 - 20a^4$ &c

$\varrho 483a^9$ &c.
$5a - 18a^3 + 14a^5$
$5a - 18a^3 + 14a^5$

$21a^2 - 84a^4 + 68a^6$
$\quad - 84a^4 + 294a^6 - 228a^8$
$\quad + 68a^6 - 228a^3 + 194a^8$

$21a^2 - 1{,}8a^7 + 3\varepsilon 8a^6 - 454a^8 + 194a^8$
$5a - 18a^3 + 14a^5$

$\varepsilon 5a^3 - 6\varrho 4a^5 + 1754a^7 - 1\varepsilon 28a^9$ &c.
$\quad - 358a^5 + 2394a^7 - 6594a^9$ &c.
$\quad + 294a^7 - 1\varepsilon 28a^9$ &c.

$\varepsilon 5a^3 - \varepsilon 50a^5 + 4200a^7 - \varepsilon 228a^9$ &c.
$21a^2 - 148a^4 + 3\varepsilon 8a^6$ &c.

$1985a^5 - 19850a^7 + 88200a^9$ &c.
$\quad - 12574a^7 + 125740a^9$ &c.
$\quad + 34614a^9$ &c.

1985 a⁵

$$\begin{array}{l} 1985a^5 - 30204a^7 + 226354a^9 \;\&c. \\ \quad 21a^2 - 148a^4 + 368a^6 \;\&c. \\ \hline 39265a^7 - 634284a^9 \;\&c. \\ \qquad\qquad - 261834a^9 \;\&c. \\ \hline 39265a^7 - 895698a^9 \;\&c. \\ \quad 21a^2 \;\&c. \\ \hline 762345a^9 \;\&c. \end{array}$$

19) Mithin iſt

$$\beta\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^3 = 33\beta a^3 - 90\beta a^5 + 100\beta a^7 - 54\beta a^9$$

$$\gamma\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^5 = 183\gamma a^5 - 930\gamma a^7 + 2600\gamma a^9 \;\&c.$$

$$\delta\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^7 = 1323\delta a^7 - 9990\,\delta a^9 \;\&c.$$

$$\varepsilon\left(\frac{\sin 3\alpha}{r}\right)^9 = 9483\,\varepsilon a^9 \;\&c.$$

$$\beta\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^3 = 65\beta a^3 - 650\beta a^5 + 4200\beta a^7 - 6228\beta a^9 \;\&c.$$

$$\gamma\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^5 = 1985\gamma a^5 - 30204\gamma a^7 + 226354\gamma a^9 \;\&c.$$

$$\delta\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^7 = 39265\,\delta a^7 - 895698\,\delta a^9 \;\&c.$$

$$\varepsilon\left(\frac{\sin 5\alpha}{r}\right)^9 = 762345\,\varepsilon a^9 \;\&c.$$

20) Man ſetze nun alles, was in einerlei Potenz multiplicirt iſt, in eine Columne unter einander und = 0, ſo erhält man

$$0 = \begin{array}{l|l|l|l|l} +\frac{3\alpha}{r} = +3 & a + 3\beta & a^3 + 3\gamma & a^5 + 3\delta & a^7 + 3\varepsilon \; a^9 \;\&c. \\ -\frac{3\alpha}{r} = -3 & +4 & & & \\ & -23\beta & +90\beta & -100\beta & +54\beta \\ & & -183\gamma & +930\gamma & -2600\gamma \\ & & & -1323\delta & +9990\delta \\ & & & & -9483\varepsilon \end{array}$$

$$0 = (3-3)a + [4 - 20\beta]a^3 + [90\beta - 180\gamma]a^5 + [930\gamma - 100\beta - 1320\delta]a^7 + [9990\delta - 2600\gamma + 54\beta - 9480\varepsilon]a^9 \;\&c.$$

21) Alſo

21) Alſo $20\beta - 4 = 0$; $20\beta = 4$ und $\beta = \frac{1.1}{2.3}$; $180\gamma - 90\beta = 0$, $18\gamma = 9\beta$; $\gamma = \frac{1.1.3.3}{2.3.45}$; $1320\delta + 100\beta - \varrho30\gamma = 0$, alſo $132\delta = \varrho3\gamma - 10\beta = \frac{\varrho3.9 - 10.4.5}{2.3.4.5} = \frac{638}{2.3.4.5}$, $\delta = \frac{63.11.1}{12.11.2.3.4.5}$ $\delta = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$; $\varrho480\varepsilon - 54\beta + 2600\gamma - \varrho990\delta = 0$, mithin $\varrho480\varepsilon = 54\beta - 2600\gamma + \varrho990\delta$, $\varrho48\varepsilon = \frac{\varepsilon8}{100} - 260\gamma + \varrho99\delta$

$= [\frac{\varepsilon8}{100}. 2.3.4.5.6.7 - 260.3.3.6.7 + \varrho99.3.3.5.5].$

$\frac{1}{2.3.4.5.6.7} = 2714 - 66900 + 165599] \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$

$= \frac{1013\varrho1}{2.3.4.5.6.7}$; $\varepsilon = \frac{151.21.41}{151.8.2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

und ſo erhält man auch alle folgenden Coefficienten

$\xi = \frac{\varepsilon.9.9}{\varepsilon.\varrho}$; $\vartheta = \frac{\xi.\varrho.\varrho}{10.11}$. Und wenn P den Coefficient des $(r-1)$ten Gliedes bedeutet, ſo iſt der des $r$ten Gliedes $\Sigma = P.\frac{(2r-3)(2r-3)}{(2r-2)(2r-1)}$ der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes $T = \Sigma.\frac{(2r-1)(2r-1)}{2r.\ (2r+1)}$

$= P.\frac{(2r-3)(2r-3)(2r-1)(2r-1)}{(2r-2)(2r-1)(2r-0)(2r+1)}.$

Exempel iſt $r = 5$ ſo iſt $P = \delta = \frac{1.2.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$

$\Sigma = \varepsilon = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ und $\varepsilon.\frac{9.9}{\varepsilon\,\varrho} = T$

22) Alſo wären, zur geſchwindern Ueberſicht der Coefficienten Werthe unter einander geſetzt, folgende

$\alpha = + \frac{1.1}{2.3}$; $\beta = + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} = \alpha\frac{3.3}{4.5}$; $\gamma = + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$

$$= \frac{5.5.}{6.7.}\beta;\ \delta = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{7.7}{8.9}\gamma;\ \varepsilon = \frac{1.1.3.3\ldots 9.9}{2.3.4.5\ldots \varepsilon.\varrho}$$

$$= \delta.\frac{9.9}{\varepsilon\,\varrho};\ \xi = \frac{1.1.3.3\ldots\varrho\,\varrho}{2.3.4.5\ldots 10.11}. = \frac{\varrho.\,\varrho}{10.\,11}.\,\varepsilon \text{ u. ſ. w.}$$

23) Die zweite Gleichung, worin ſich alles aufhebt und aus dieſer Aufhebung die Werthe der Coefficienten ergeben, iſt folglich

$$\begin{array}{rl|l|l|l|l}
0 = +\frac{5\alpha}{r} = +5 & a + 5\beta & a^3 + 5\gamma & a^5 + 5\delta & a^7 + 5\varepsilon & a^9 \ \&c. \\
-\frac{5\alpha}{r} = -5 & +18 & -14 & & & \\
& -\varepsilon 5\beta & +\varepsilon 50\beta & -4200\beta & +\varepsilon 228\beta & \\
& & -1985\gamma & +30204\gamma & -226354\gamma & \\
& & & -39265\delta & +895\varepsilon\varrho 8\delta & \\
& & & & -7\varepsilon 2345\varepsilon &
\end{array}$$

$$0 = (5-5)a + [18 - \varepsilon 0\beta]a^3 + [\varepsilon 50\beta - 14 - 1980\gamma]a^5 + [\gamma.\ 30204 - 4288\beta - 39260\delta]a^7 + [\varepsilon 228\beta - 226354\gamma + \delta\, 895\varepsilon\varrho 5 - 7\varepsilon 2340\varepsilon]a^9 \ \&c.$$

Mithin

24) $18 - \varepsilon 0\beta = 0,\ \varepsilon 0\beta = 18,\ \beta = \frac{1.1}{2.3};\ \varepsilon 50\beta - 14 - 1980\gamma = 0,\ 1980\gamma = \varepsilon 50\beta - 14 = \frac{\varepsilon 50 - 80}{2.3} = \frac{990}{2.3}$

$\gamma = \frac{16.11}{18\ 10.11};\ \gamma = \frac{1.1.3.3.}{2.3.4.5};\ 30204\gamma - 4200\beta - 39260\delta = 0$ alſo $39260\delta = 30204\gamma - 4200\beta = \frac{30204 - 4200.18}{2.3.4.5}$

$= \frac{18223}{\varepsilon};\ \delta = \frac{9.\ 21.5.27}{2.3.4.5.6.7.5.27} = \frac{1.1\ 3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7};\ 7\varepsilon 2340.\,\varepsilon - 895\varepsilon\varrho 8.\,\delta + 226354.\,\gamma - \varepsilon 228\beta = 0,\ 7\varepsilon 2340.\,\varepsilon = 895\varepsilon\varrho 8.\,\delta - 226354.\,\gamma + \varepsilon 228\beta = [895\varepsilon\varrho 8.\ 21 - 226354.\ 9.6.7 + \varepsilon 228.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7]\ \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}$

$= \frac{841\varepsilon 9950}{2.3.4.5.6.7};\ \varepsilon = \frac{841\varepsilon 9950}{\varrho 935.8\ 2.3.4.5.6.} = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

Ganz die nämlichen Reſultate wie in (22)

25)

25) Setzen wir nun dieſe in 22 und hier in 24 erhaltenen unveränderlichen Werthe von $\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ &c. in die allgemeine Gleichung $\frac{\alpha}{r} = a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9 + \zeta a^{\varrho}$ &c. ferner Statt a wird wiederum $\frac{\sin\alpha}{r}$, ſo iſt

$$\alpha = \sin\alpha + \frac{1.1}{2.3}(\sin\alpha)^3 r^{-2} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}(\sin\alpha)^5 r^{-4}$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}(\sin\alpha)^7 r^{-6} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}(\sin\alpha)^9 r^{-8}$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho}(\sin\alpha)^{\varrho} r^{-\varepsilon} \ldots\ldots$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2s-3).(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(2s-2)(2s-1)}(\sin\alpha)^{2s-1}\ r^{2s-2}\ \&c.$$

Dieſe nämliche, nur hier in Rückſicht der Coefficienten etwas anſchaulicher von mir dargeſtellte unendliche Reihe fanden durch Zufall zeither die Analyſten vermittelſt einer grundloßen Hypotheſe und der Anwendung der unmathematiſchen Differenzial und IntegralRechnung (Siehe A. G. Käſtners Anfangsgründe der Analyſis des Unendlichen. 3te Auflage, Göttingen 1799 pag. 285—289 § 281). Hier iſt ſie bewießen oder abgeleitet worden. —

26) Setzen wir in die unendliche Reihe in (25) ſin $\alpha = r$ ſo wird $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ wo π = dem ganzen Umkreiß eines Cirkels deſſen Halbmeſſer = r Und wir erhalten

$$\tfrac{1}{4}\pi = r.[1 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-2)(2s-1)}$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5\ldots.(2s-1)(2s-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots.(2s-0).(2s+1)}\ \&c.]$$

Iſt $\alpha = \frac{\frac{1}{4}\pi}{3} = \frac{1}{10}\pi$, ſo iſt ſin α = ſin $\frac{1}{10}\pi$ und $= \frac{1}{2}r$ Mithin

$$\tfrac{1}{10}\pi = r.[\tfrac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3}\frac{1}{2^3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\frac{1}{2^5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}.\frac{1}{2^7}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\,\frac{1}{2^9}\ldots\ldots+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2r-3)(2r-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(2r-2)(2r-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r-1}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2r-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots 2r}\,\frac{(2r-1)}{(2r+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1}\ \&c.$$

27) Den Bogen α aus ſeinem Coſinus = c, ſeiner Sekante = g, ſeiner Coſecante = h, Tangente = e, Cotangente = f, aus ſeinem Querſinus = b und Quercoſinus d zu finden.

28) Da der Coſin α = c gleich iſt dem Sinus des Ergänzungsbogen β vom Quadranten = $\frac{1}{4}\pi$ zum Bogen α d. i. daß $\beta = \frac{1}{4}\pi - \alpha$ und $\beta + \alpha = \frac{1}{4}\pi$ ſo iſt $\alpha = \frac{1}{4}\pi - \beta$. Man ſuche daher den Bogen β aus ſeinem Sinus = c, = $(\sin\beta) : r^{-1}$ ziehe ſolchen vom Quadranten ab, ſo bleibt der Bogen α übrig. Es läßt ſich alſo ſetzen $\beta = r.\ [c + \frac{1.1}{2.3}c^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}c^5$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}c^7+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}c^9\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-2)(2s-1)}c^{2s-1}$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-1)(2s-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-1)(2s-1)}c^{2s+1}\ \&c]$$

Dieſe Gleichung zieht man von der Gleichung in (26) $\frac{1}{4}\pi = r\,(1+\frac{1.1}{2.3}$

$$+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\ldots\ldots$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-2)(2s-1)}\ \&c.)$$ ab, ſo erhält man

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi - \beta = r\left[\frac{1-c}{1}+\frac{1.1}{2.3}(1-c^3)+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}(1-c^5)\right.$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}(1-c^7)+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}(1-c^9)\ \&c\ \ldots\ldots$$

$$+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-2)(2s-1)}\left(1-c^{(2s-1)}\right)$$

$$\left.+\frac{1.1.3.3.5.5\ldots\ldots(2s-1)(2s-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots\ldots(2s-0)(2s+1)}\left(1-c^{2s+1}\right)\&c.\right]$$

29) Und da $\cos\alpha = \frac{r^2}{\sec.\alpha}$, $\frac{\cos\alpha}{r} = \left(\frac{\mathrm{secant}\,\alpha}{r}\right)^{-1}$ auch $\frac{\cos\alpha}{r} = c$ und $\frac{\mathrm{secant}\,\alpha}{r} = g$ ſo iſt $c = g^{-1}$. Mithin den Bogen aus ſeiner Sekante zu finden, dient folgende unendliche Reihe

$$\alpha = r\left[\frac{g-1}{g} + \frac{1.1}{2.3}.\frac{g^3-1}{g^3} + \frac{1.1\ 3.3}{2.3.4.5}\frac{g^5-1}{g^5} + \frac{1\ 1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}.\left(\frac{g^7-1}{g^7}\right)\right.$$

$$+ \frac{1.\ 1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5\ \ldots\ (2s-3)\ (2s-3)}{2\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7\ \ldots\ (2s-2)\ (2s-1}.\left(\frac{g^{2s-1}-}{(g^{2s-1})}\right)$$

$$\left. + \frac{1.1.3.3\ 5.5\ \ldots\ (2s-1)\ (2s-1)}{2.3.4.5.6.7\ \ldots\ (2s-0)\ (2s+1)}\left(\frac{g^{2s+1}-1}{g^{2s+1}}\right) \&c\right]$$

28) Weil ferner $\sin\alpha = \frac{r^2}{\mathrm{cosec}\,\alpha}$ alſo $\frac{\sin\alpha}{r} = \left(\frac{\mathrm{cosec}\,\alpha}{r}\right)^{-1}$ und $\frac{\sin\alpha}{r} = a$ auch $\frac{\mathrm{cosec}\,\alpha}{r} = h$, ſo iſt $a = h^{-1}$ Mithin die Reihe zum Finden des Bogens α aus ſeiner Coſekante h folgende, indem man in 25, Statt $\frac{\sin\alpha}{r}$ den Werth h^{-1} ſetzt.

$$\alpha = r.\left[h^{-1} + \frac{1.1}{2.3}h^{-3} + \frac{1.1.3\ 3}{2.3.4.5}h^{-5} + \frac{1.\ 1.3.3.5.5}{2.3\ 4.5.6\ 7}h^{-7}\right.$$

$$\left. + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}h^{-9} \ldots + \frac{1\ 1.3.3.5.5\ \ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ \ldots(2s-2)(2s-1)}.h^{-2s+1} \&c.\right]$$

29) Den Bogen α aus ſeiner tangente $= re$ zu finden. Weil $\tan\alpha = \frac{r\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ſo iſt $\tan\alpha^2 = \frac{r^2\sin\alpha^2}{r^2-\sin\alpha^2}$ und $r^2\tan\alpha^2 - \sin\alpha^2\tan\alpha^2 = r^2\sin\alpha^2$, ſo iſt $\sin\alpha^2[r^2+\tan\alpha^2] = r^2\tan\alpha^2$ und $\sin\alpha = \frac{r\tan}{\sqrt{(r^2-\tan\alpha^2)}}$, $\frac{\sin\alpha}{r} = s = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(r^2+\tan\alpha^2)}}$ und da $\tan\alpha = r.e$ ſo iſt

$$s = \frac{e}{(r^2+e^2)^{\frac{1}{2}}} = e - \tfrac{1}{2}e^3 + \frac{1.3}{2.4}e^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}e^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^9 \&c.$$

Dies

Dieſen Werth von a in die Gleichung in (27) $\alpha = r. \left[a + \frac{1.1}{2.3} a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9} a^9 \;\&c \right]$ geſetzt, ſo erhält man folgende Reihe den Bogen aus ſeiner Tangente zu finden $\alpha = r. \left[e - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} - \frac{e^7}{7} + \frac{e^9}{9} - \frac{e^{\cdots}}{\cdots} \dots - \frac{e^{4s-1}}{(4s-1)} + \frac{e^{4s+1}}{4s+1} \;\&c.\right.$

Nämlich

$$
\begin{array}{rl}
\frac{\alpha}{r} = +a = & e - \frac{1}{2}e^3 + \frac{1.3}{2.4}e^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}e^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^9 \;\&c \\
+\frac{1.1}{2.3}a^3 = & +\frac{1.1}{2.3}e^3 - \frac{1.1.3}{2.3.2}e^5 + \frac{1.1.3.5}{2.3.2.4}e^7 - \frac{1.1.3.5.7}{2.3.2.4.6}e^9 \\
+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 = & +\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}e^5 - \frac{1.1.3.3.5}{2.3.4.5.2}e^7 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.2.4}e^9 \\
+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 = & +\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}e^7 - \frac{1.1.3.3.5.5.7}{2.3.4.5.6.7.2}e^9 \\
+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9 = & +\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}e^9 \\
\hline
\alpha = r\,[e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{5}e^5 - \frac{1}{7}e^7 + \frac{1}{9}e \;\&c. &
\end{array}
$$

30) Doch läßt ſich dieſe unendliche geſetzmäßig fortſchreitende Reihe auch auf folgende Weiſe finden oder ableiten. Weil man ſetzen kann $\tang \alpha = re$, und $e = \frac{\tang \alpha}{r}$ wenn der Bogen $= \frac{\alpha}{r}$ iſt, ſo iſt $e = \tang. \frac{\alpha}{r}$. Wir haben oben gefunden, daß $\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \; \cos \alpha}{r}$ und $\cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha^2 - \sin \alpha^2}{r}$. Nun iſt aber $\cos 2\alpha : \sin 2\alpha = r : \tang 2\alpha$, alſo $\tang 2\alpha . \cos 2\alpha = r. \sin 2\alpha$ und $\tang 2\alpha = \frac{r. \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{r.\,2.\, \sin\alpha \cos\alpha}{r}}{\frac{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}{r}}$

$= \frac{r.2.\, \sin\alpha.\ \cos\alpha}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}$. Jetzt dividire man Zähler und Nenner mit

mit $\frac{\cos\alpha^2}{r^2}$, ſo iſt $\tang 2\alpha = \frac{2.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.r^3}{r^2 - r^2\frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2}}$

mithin $\tang 2\alpha = \frac{2\,r^2.\tang\alpha}{r^2 - \tang\alpha^2} = \frac{2re}{1-e^2}$ alſo $\frac{\tang 2\alpha}{r} = \frac{2e}{1-e^2}$

Jetzt ſetze man, es ſei

$$\frac{\alpha}{r} = e + \beta a^3 + \gamma e^5 + \delta e^7 + \varepsilon e^9 + \zeta e^{q} \; \&c.$$

Die Coefficienten β, γ, δ, ε, ζ &c. ſollen auch hier unbekannte, aber unveränderliche Größen ſein ſo daß dieſe Gleichung Statt finde, es möge e was immer für einen möglichen Werth vorſtellen. Es iſt leicht einzuſehen, daß in jedem Gliede der unendlichen Reihe e wenigſtens in der erſten Potenz vorhanden ſein müſſe; weil, wenn $\alpha = 0$, alsdann die ganze Gleichung = 0 iſt, ſelbſt $e = 0$ ſein muß, folglich alles verſchwindet. Wir hätten uns auch der Tangente des 3 oder 5 fachen Bogens und ihres Werthes in einer Function des einfachen Bogens Tangente zum Beſtimmen der Reihe, den Bogen aus ſeiner Tangente zu finden, bedienen können, und wir würden gleiche Reſultate erhalten haben $\tang 3\alpha = \frac{3e - 1e^3}{1 - 3e^2} = 3e + 8e^3 + 20e^5 + 60e^7 + 160e^9$ &c.

Wenn ein anderer Bogen ω ſeine tangente $= r.x$ iſt; ſo iſt, wenn der Ausdruck

$$\frac{\alpha}{r} = e + \beta e^3 + \gamma e^5 + \delta e^7 + \varepsilon e^9 + \zeta e^{q} \; \&c.$$ allgemein gültig ſein ſoll,

$$\frac{\omega}{r} = x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \varepsilon x^9 + \zeta x^{q} \; \&c.$$

Jezt nehme ω den Werth von 2α an, ſo iſt $x = \frac{\tang 2\alpha}{r}$

Alſo $\frac{2\alpha}{r} = \frac{\tang 2\alpha}{r} + \beta\left(\frac{\tang 2\alpha}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{\tang 2\alpha}{r}\right)^5 + \delta\left(\frac{\tang 2\alpha}{r}\right)^7$ $+ \varepsilon\left(\frac{\tang 2\alpha}{r}\right)^9$ &c, und da $\frac{\tang 2\alpha}{r} = \frac{2e}{1-e^2}$ ſo iſt

$\frac{2\alpha}{r}$

$$\frac{2\alpha}{r} = \left(\frac{2e}{1-e^2}\right) + \beta\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^3 + \gamma\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^5 + \delta\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^7 + \varepsilon\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^9 \;\&c.$$

Aber $\frac{2\alpha}{r}$ iſt auch das Doppelte von $\frac{\alpha}{r} = e + \beta e^3 + \gamma e^5$ &c.

Mithin

$$0 = \frac{2\alpha}{r} - \frac{2\alpha}{r} = 2e + 2\beta e^3 + 2\gamma e^5 + 2\delta e^7 + 2\varepsilon e^9 + 2\zeta e^{11} \;\&c.$$

$$- \left(\frac{2e}{1-e^2}\right) - \beta\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^3 - \gamma\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^5 - \delta\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^7 - \varepsilon\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^9 \;\&c.$$

Nun iſt aber $\frac{2e}{1-e^2} = 2e + 2e^3 + 2e^5 + 2e^7 + 2e^9 + 2e^{11}$ &c.

$$\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^2 = 2^2.\left[e^2 + \frac{2}{1}e^4 + \frac{2.3}{1.2}e^6 + \frac{2.3.4}{1.2.3}e^8 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}e^{10} + \&c.\right]$$

$$\left(\frac{2e}{1-e^2}\right)^3 = 2^3.\left[e^3 + \frac{3}{1}e^5 + \frac{3.4}{1.2}e^7 + \frac{3.4.5}{1.2.3}e^9 + \frac{3.4.5.7}{1.2.3.4}e^{11} \;\&c.\right]$$

$$\left(\frac{e}{1-e^2}\right)^n = 2^n\left[e^n + \frac{n}{1}e^{n+2} + \frac{n(n+1)}{1.2}e^{n+4} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\;2.\;3}e^{n+6} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\;2.\;3.\;4}e^{n+8} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}e^{n+10} \;\&c.\right]$$

Folglich

	e	e^3	e^5	e^7	e^9	e^{11} &c.
$+\frac{2\alpha}{r} =$	$+2$	$+2\beta$	$+2\gamma$	$+2\delta$	$+2\varepsilon$	$+2\zeta$
$-\frac{2\alpha}{r} =$	-2	-2	-2	-2	-2	-2
		-8β	-20β	-40β	-68β	$-\varepsilon0\beta$
			-28γ	-114γ	-340γ	-794γ
				$-\varepsilon8\delta$	-628δ	$-20\varepsilon8\delta$
					-368ε	-2800ε
						-1228ζ

$-6\beta - 2 = 0$ alſo $\beta = -\frac{1}{3}$; $26\gamma + 20\beta + 2 = 0$, 26γ

$=$

$= -2 - 20\beta,\ \gamma = \frac{8-2}{26} = +\frac{1}{5};\ 86\delta + 114\gamma + 40\beta + 2 = 0,$ alſo

$86\delta = -\frac{114}{5} + \frac{40}{3} - 2 = -28 + 14 - 2 = -16$ und

$\delta = -\frac{1}{7};\ 366.\varepsilon + 628\delta + 340\gamma + 68\beta + 2 = 0,\ 366.\varepsilon = \frac{628}{7} - \frac{340}{5} + \frac{68}{3} - 2 = 88 - 80 + \frac{228}{10} - 2 = \frac{488}{10},$

$\varepsilon = +\frac{488}{3660},\ \varepsilon = +\frac{1}{9};\ 1226\zeta + 2800\varepsilon + 2088.\delta + 794\gamma + 80\beta + 2 = 0,\ 1226.\zeta = -368 + 368 - 168 + 34 - 2 = -136,\ \zeta = -\frac{1}{\varrho}:$ alſo

$$\beta = -\frac{1}{3},\ \gamma = +\frac{1}{5},\ \delta = -\frac{1}{7},\ \varepsilon = +\frac{1}{9},\ \zeta = -\frac{1}{\varrho}\ \&c.$$

und $$\frac{\alpha}{r} = \frac{e}{1} - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} - \frac{e^7}{7} + \frac{e^9}{9} - \frac{e^\varrho}{\varrho} \dots - \frac{e^{4s-1}}{(4s-1)} + \frac{e^{4s+1}}{4s+1}\ \&c.$$

Auch dieſe Leibnitziſche Formel iſt nun von mir hier wißenſchaftlich bewießen. —

31) Da $\tang \alpha = \frac{r \sin \alpha}{\cos \alpha}$ und $\cotang \alpha = \frac{r \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ſo iſt $\cotang \alpha = \frac{r^2}{\tang \alpha}$ und $\frac{\cotang \alpha}{r} = f = \frac{1}{e}$ oder $e = \frac{1}{f}$: dieſen Werth von e in die letzte Gleichung geſetzt, giebt den Ausdruck den Bogen aus ſeiner Cotangente zu finden.

$$\alpha = r.\left[\frac{1}{f} - \frac{1}{3.f^3} + \frac{1}{5.f^5} - \frac{1}{7.f^7} + \frac{1}{9.f^9} - \frac{1}{\varrho\ f^\varrho}\ \&c\right]$$

32) Aus dem Querſinus des Bogens α den Bogen zu finden. Wenn der Halbmeßer $= r$, ſo ſei der Bogen $= \alpha$ der Querſinus $= r.b$ und der Sinus $= r.a$. Es verhält ſich aber nun wie bekannt der doppelte Halbmeßer weniger dem Querſinus zum Sinus, wie ſich verhält der Sinus zum Querſinus d. i. $2r - \text{querſin}\,\alpha : \sin\alpha = \sin\alpha : \text{querſin}\,\alpha$ oder $2r - r.b : ar = ar : rb$ und

$2r^2$

$2r^2b - r^2b^2 = r^2a^2$ folglich $a^2 = 2b - b^2$ und $a = (2b - b^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}.\, b^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$a = 2.\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Setzen wir nun dieſen Werth von a in die Gleichung $\alpha = r\left[a + \frac{1\cdot1}{2\cdot3}a^3 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}a^5 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}a^7 + \frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}a^9 \;\&c.\right]$ ſo erhalten wir den Ausdruck zum Finden des Bogens aus ſeinem Querſinus.

Nun iſt aber, wenn man in der bekannten BinominalFormel $^1a = \frac{b}{2}$, $^1b = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $m = \frac{n}{2}$ ſetzt

$$a^n = 2^n.\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = 2^n\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n+2}{2}}$$
$$+ \frac{n(n-2)}{2.\;4}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n+4}{2}} - \frac{n\;(n-2)\;(n-4)}{2.\;4.\;6}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n+6}{2}}$$
$$+ \frac{n\;(n-2)\;(n-4)\;(n-6)}{2.\;4.\;6.\;8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n+8}{2}} \;\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{n\;(n-2)\;(n-4)\ldots(n-4s-2)}{2.\;4.\;6\;\ldots\;4s}\left(\frac{b}{2}\right)^{4s+n} \;\&c.\Big]$$

Folglich

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\frac{\alpha}{r}=a=2\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{2} & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2\cdot1}{2\cdot4} & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{2\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\;\&c.\\
+\frac{1\cdot1}{2\cdot3}a^3=+\frac{1\cdot1}{2\cdot3}8 & -\frac{1\cdot1}{2\cdot3}\cdot\frac{3}{2}\cdot8 & +\frac{1\cdot1}{2\cdot3}\cdot\frac{3\cdot1}{2\cdot4}\cdot8 & +\frac{1\cdot1}{2\cdot3}\cdot\frac{3\cdot1\cdot1}{2\cdot4\cdot6}\cdot8 & \\
+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}a^5= & +\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot28}{2\cdot3\cdot4\cdot5} & -\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{5}{2}28 & +\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot3}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot2\cdot4}28 & \\
+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}a^7= & & +\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\varepsilon8 & -\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot\frac{7}{2}\cdot\varepsilon8 & \\
+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}a^9= & & & +\frac{1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}368 &
\end{array}$$

$$\alpha = 2.r\left[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\right.$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \ldots + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2s-4)\,(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(2s-2)\,(2s-1)}.$$

$$\left.\left(\frac{b}{2}\right)^{s-1} \&c.\right]$$

33) Dieſe nämliche unendliche Reihe findet man auch auf folgende Weiſe.

Man ſetze, es ſei

$$\frac{\alpha}{r} = 2\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\beta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\gamma\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + 2\delta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + 2\varepsilon\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$+ 2\zeta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ \&c. ſo iſt}$$

$$\frac{\omega}{r} = 2\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\beta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\gamma\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + 2\delta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + 2\varepsilon\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$+ 2\zeta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ \&c. wo}$$

$x = \text{querſin}\,\frac{\omega}{r}$ iſt. Jetzt ſei $\frac{\omega}{r} = \frac{2\alpha}{r}$ ſo iſt $x = \frac{\text{querſin}\,2\alpha}{r}$

$$\frac{2\alpha}{r} = 2\left(\frac{\text{querſin}\,2\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\beta\left(\frac{\text{querſin}\,2\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\gamma\left(\frac{\text{querſin}\,2\alpha}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$+ 2.\delta\left(\frac{\text{querſin}\,2\alpha}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + 2.\varepsilon\left(\frac{\text{querſin}\,2\alpha}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ \&c.}$$

aber auch $\frac{2\alpha}{r} = 4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\beta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 4\gamma\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + 4.\delta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$

$$+ 4\varepsilon\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \text{ \&c.}$$

Da aber nun $\text{querſin}\,2\alpha = r - \cos 2\alpha = \frac{r^2 - \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2}{r}$

und $\sin\alpha^2 = r^2 - \cos\alpha^2$ ſo iſt $\text{querſin}\,2\alpha = \frac{2r^2 - 2\cos\alpha^2}{r}$

und da $\cos\alpha^2 = (r - \text{querſin}\,\alpha)^2$ ſo iſt $\text{querſin}\,2\alpha = (2r^2 - 2r^2$

$+ 4r\,\text{querſin}\,\alpha - 2\,\text{querſin}\,\alpha^2)\,r^{-1} = \frac{4r\,\text{querſin}\,\alpha - 2\,\text{querſin}\,\alpha^2}{r}$

und

und wenn querſin $\alpha = rb$, ſo iſt querſin $2\alpha = \frac{4r^2b - 2r^2b^2}{r}$

$= r.4b - 2b^2$ alſo $4b - 2b^2 = \frac{\text{querſin } 2\alpha}{r} = x$

alſo $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2.\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = 2^n\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}$

Mithin

$$\frac{2\alpha}{r} = 4\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\beta 2^3\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} + 2\gamma 2^5\left(\frac{b}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}} \text{ \&c.}$$

Folglich

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
\frac{2\alpha}{r} = +4 & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\beta & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 4\gamma & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + 4\delta & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + 4.\varepsilon & \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \\
-\frac{2\alpha}{r} = -4 & +\frac{4}{2} & +\frac{4.1}{2.4} & +\frac{4.1.3}{2.4.6} & +\frac{4.1.3.5}{2.4.6.8} & \\
 & -14\beta & +\frac{143}{2}\beta & +\frac{14.1.3}{2.4}\beta & +\frac{14.1.3.1}{2.4.6}\beta & \\
 & & -54.\gamma & +\frac{54.5}{2}\gamma & +\frac{54.5.3}{2.4}\gamma & \\
 & & & -194\,\delta & +194\frac{7}{2}\delta & \\
 & & & & -714.\,\varepsilon &
\end{array}$$

$10\beta - 2 = 0$, $\beta = \frac{1.1}{2.3}$, $50\gamma - 20\beta - \frac{1}{2} = 0$, $50\gamma = \frac{9}{2}$, $\gamma = \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}$

$190\delta = 28.5.\gamma - 6\beta + \frac{1}{4} = 10 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{39}{4}$, $\delta = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$

$710\varepsilon = \varepsilon 8.7\delta - \varepsilon 0\gamma - \frac{1}{8} + \frac{5}{28} = \frac{\varepsilon 8.28.7.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7.28} - \frac{160.6.7.28.5}{2.3.4.5.6.7.28}$

$- \frac{2.2.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.28} = \frac{1810440}{2.3.4.5.6.7.28}$, $\varepsilon = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c.

und $\alpha = 2r.\left[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\right.$

$+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \ldots + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(2s-2)(2s-1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2s-1}{2}}$

&c.

34) Es ſei der quercos $\alpha = rd =$ querſin ω, mithin $\alpha = \frac{1}{4}\pi - \omega$

und $\omega = 2r\left[\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\right.$ &c.

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\pi - \omega = r\Big[1 - 2\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(1 - 2.\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(1 - 2\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(1 - 2\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{7}{2}}\right) + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(1 - 2\left(\tfrac{d}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\right) \&c.$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5 \ldots (2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7 \ldots (2s-2)(2s-1)}\left(1 - 2\left(\tfrac{d}{2}\right)^{2s-1}\right) \&c.\Big]$$

Dies iſt der Ausdruck zum Finden des Bogens aus ſeinem Querſinus.

35) Gerade die nämlichen Reihen wurden durch den Zufall, daß ein gemachter Fehler eben durch einen zweiten wieder gut gemacht wurde, vermittelſt der Differenzial- und IntegralRechnung auch gefunden, ohne aber ihre Richtigkeit beweißen zu haben und beweißen zu können. Man ſehe nur die LehrBücher der höhern Analyſis verſchiedener Verfaſſer z. E. Käſtners Anfangsgr. der Analyſis des Unendlichen.

36) Die hier erhaltenen drei unendlichen GrundReihen ſind daher folgende: a bedeute den ſinus des Bogens α, b der querſinus deſſelben und e die Tangente davon, wenn der Halbmeſſer $= 1$ iſt und wenn dieſer $= r$, ſo ſei der Bogen $= \alpha$

$$\alpha = r.\Big[a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9$$

$$\ldots\ldots + \frac{1.1.3.3.5.5 \ldots\ldots (2s-3)(2s-3)}{2.3.4.5.6.7 \ldots\ldots (2s-2)(2s-1)}a^{2s-1}$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5 \ldots (2s-1)(2s-1)}{2.3.4.5.6.7 \ldots 2s.(2s+1)}.a^{2s+1} \;\&c.$$

$$\alpha = 2r\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.6}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5 \ldots (2.s-3)(2.s-3)}{2.3.4.5.6.7 \ldots (2.s-3)(2.s-1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2.s-1}$$

$$+ \frac{1.1.3.3.5.5 \ldots (2s-1)(2s-1)}{2.3.4.5.6.7 \ldots 2s,(2s+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2s+1} \;\&c.\Big]$$

$$\alpha = r.\Big[e - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} + \frac{e^7}{7} + \frac{e^9}{9} + \frac{e^9}{9} \ldots\ldots \frac{e^{4s-1}}{4s-1}$$

$$+ \frac{e^{4s+1}}{4s+1} \;\&c.\Big]$$

37) Setzt man a = 1 ſo iſt $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ = einem Viertel des ganzen Umkreiſes. Wird geſetzt b = 2 ſo iſt $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, b = $\frac{1}{2}$ ſo iſt $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Wird angenommen e = 1 ſo iſt $\alpha = \frac{1}{8}\pi$ Folglich der ganze Umkreiß des Cirkels

$$\pi = 4.r\left[1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9} \&c.\right.$$

$$\ldots + \frac{1.\ 1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5 \ldots (2.s-3)\ (2.s-3)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7 \ldots (2.s-2)\ (2.s-1)}$$

$$+ \frac{1.\ 1.3.\ 3.\ 5.\ 5 \ldots (2.s-1)\ (2.s-1)}{2.3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7 \ldots 2.s.\ (2.s+1)} \&c.$$

$$\pi = 8r.\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \ldots - \frac{1}{4s-1}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4s+1} \&c.\right]$$

$$\pi = 8r\left[\frac{3-1}{3} + \frac{7-5}{5.7} + \frac{15-9}{9.15} + \frac{13-11}{11.13} \ldots + \frac{(4s+1)-(4s+1)}{(4s+1)(4s+3)} \&c.\right]$$

$$\pi = 14r\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.15} + \frac{1}{11.13} \ldots + \frac{1}{(4s+1)(4s+3)} \&c.\right]$$

$$\pi = 14r\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3.5} - \frac{1}{7.9} - \frac{1}{15.11} - \frac{1}{13.15} \ldots - \frac{1}{14s^2-1} \&c.\right]$$

38) Zeither ſuchten wir die unendlichen Reihen zum Finden des des Bogens α aus ſeinem Sinus, Coſinus, Querſinus und Quercoſinus, aus ſeiner Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante zu beſtimmen. Die Grundlagen waren gewiſſe Reihen ins Unendliche fortlaufender Potenzen der erwähnten Größen, ihre Exponenten waren die von 1 nach einander folgenden ungeraden Zahlen. Den Coefficienten zu einer jeden ſolchen Potenz zu finden, dienten uns **gründlich bewießene analytiſch trigonometriſche** Gleichungen oder Wahrheiten — oder die Werthe der Sinuße Tang. etc. des zwei 3, 4, 5, 6, 7, &c. fachen Bogens in Functionen des einfachen Bogens Sinus Tang. etc. Auch hier ſchritten die Potenzen nach den ungeraden Zahlen fort.

39) Jetzt wollen wir den Sinus, Coſinus, Querſinus &c. eines Bogens ebenfalls in einer tranſcendentalen Gleichung oder in einer ewig durch kein poſitives und negatives Potenziren veränderbaren,

un'

unendlichen Reihe beſtimmen, wegen des tranſcendentalen Verhältnißes dieſer ungleichartigen Größen des Bogens und ſeiner zugeordneten geradlinigten Größen.

38) Weil auch hier die Coëfficienten vermittelſt einer Anwendung jener oben gebrauchten trigonometriſchen GrundWahrheiten und GrundFormeln nur wißenſchaftlich beſtimmt werden dürfen und können und dieſes ſonſt nicht möglich wäre, wenn die unendlichen Reihen zum Finden des Sinus nicht ebenfalls mit der erſten Potenz des Bogens α ohne unbeſtimmten Coefficienten anfienge und die Exponenten der als Glieder auf einander folgenden Potenzen des Bogens nicht auch die nach einander folgenden ungeraden Zahlen wären; ſo ſetze ich, es ſei, wenn der Halbmeßer gleich eins iſt, der Bogen $= \alpha$, deßen Sinus $= a$, coſin $\alpha = c$, querſin $\alpha = b$, quercoſin $\alpha = d$, tang $\alpha = e$, cotang $\alpha = f$, ſecant $\alpha = g$, coſecante $\alpha = h$ allgemein

$a = \sin \alpha = \alpha + \beta . \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c.

39) Mithin, wenn der Bogen $= \omega$ und x ſein Sinus iſt

$x = \sin \omega = \omega + \beta . \omega^3 + \gamma . \omega^5 + \delta . \omega^7 + \varepsilon . \omega^9 + \zeta \omega^{11}$ &c.

und wenn ω nach und nach z. B. den Werth von 3α, 5α &c. annimmt ſo iſt

$x = \sin 3\alpha = 3\alpha + \beta 3^3 \alpha^3 + \gamma 3^5 \alpha^5 + \delta 3^7 \alpha^7 + \varepsilon 3^9 \alpha^9 + \zeta 3^{11} \alpha^{11}$ &c.

$x = \sin 5\alpha = 5\alpha + \beta 5^3 \alpha^3 + \gamma . 5^5 \alpha^5 + \delta 5^7 \alpha^7 + \varepsilon 5^9 \alpha^9 + \zeta 5^{11} \alpha^{11}$ &c.

Nun iſt aber auch $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin \alpha^3 = 3a - 4a^3$;

$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 18 \sin \alpha^3 + 14 \sin \alpha^5 = 5a - 18a^3 + 14a^5$

Mithin iſt auch.

$\sin 3\alpha = 3a - 4a^3 = 3[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c.$]$
$- 4[\alpha + \beta . \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c$]^3$ und

$\sin 5\alpha = 5a - 18a^3 + 14\alpha^5 = 5[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9$
$+ \zeta \alpha^{11}$ &c.$] - 18[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c.$]^3$
$+ 14[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c.$]^5$.

Folglich iſt

$0 = 3\alpha + \beta 3^3 \alpha^3 + \gamma 3^5 \alpha^5 + \delta 3^7 \alpha^7 + \varepsilon 3^9 \alpha^9 + \zeta 3^{11} \alpha^{11}$ &c.
$- 3[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5 + \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 - \zeta \alpha^{11}$ &c.$] + 4.[\alpha + \beta \alpha^3 + \gamma \alpha^5$
$+ \delta \alpha^7 + \varepsilon \alpha^9 + \zeta \alpha^{11}$ &c.$]^3$ Und auch

$0 = 5\alpha + \beta 5^3 \alpha^3 + \gamma 5^5 \alpha^5 + \delta 5^7 \alpha^7 + \varepsilon 5^9 \alpha^9 + \zeta \alpha^{11} 5^{11}$ &c.$]$

— 5.

$- 5.[\alpha + \beta\alpha^3 + \gamma\alpha^5 + \varepsilon\alpha^9 + \zeta\alpha \text{ &c.}] + 18\,[\alpha + \beta\alpha^3 + \gamma\alpha^5 + \delta\alpha^7 + \varepsilon\alpha^9 + \zeta\alpha^{11} \text{ &c.}]^3 - 14\,[\alpha + \beta\alpha^3 + \gamma\alpha^5 + \delta\alpha^7 + \varepsilon\alpha^9 + \zeta\alpha^{11} \text{ &c.}]^5$ Wir haben daher zuvörderſt die Reihe

$\sin\alpha = \alpha + \alpha\alpha^3 + \gamma\alpha^5 + \delta\alpha^7 + \varepsilon\alpha^9 + \zeta\alpha^{11}$ ect. in die 3te und 5te Potenz zu erheben.

$$\begin{aligned}\sin\alpha^3 = \alpha^3 + 3\alpha\alpha^5 + 3\gamma\alpha^7 + 3\delta\alpha^9 + 3\varepsilon\alpha^{11} \text{ etc.}\\ + \beta^3\alpha^9 + 3\beta^2\gamma\alpha^{11} \text{ etc.}\\ + 3\beta^2\alpha^7 + 6\beta\gamma\alpha^9 + 6\beta\delta\alpha^{11} \text{ ect.}\\ + 3\gamma^2\alpha^{11} \text{ etc;}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha^5 = \alpha^5 + 5\beta\alpha^7 + 5\alpha^9 + 5\delta\alpha^{11} \text{ etc.}\\ + \varepsilon\beta^3\alpha^{11} \text{ etc.}\\ + \varepsilon\beta^2\alpha^9 + 18\beta\gamma\alpha^{11} \text{ etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{alſo } 4.\sin\alpha^3 = 4\alpha^3 + 10\beta\alpha^5 + 10\gamma\alpha^7 + 10\delta\alpha^9 + 10\varepsilon\alpha^{11} \text{ ect.}\\ + 10\beta^2\alpha^7 + 20\beta\gamma\alpha^9 + 20\beta\delta\alpha^{11} \text{ ect.}\\ + 4\beta^3\alpha^9 + 10\beta^2\gamma\alpha^{11} \text{ etc.}\\ + 10\gamma^2\alpha^{11} \text{ etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mithin } 18\sin\alpha^3 = 18\alpha^3 + 50\beta\alpha^5 + 50\gamma\alpha^7 + 50\delta\alpha^9 + 50\varepsilon\alpha^{11} \text{ &c.}\\ + 50\beta^2\alpha^7 + 80\beta\gamma\alpha^9 + 80\beta\delta\alpha^{11} \text{ &c.}\\ + 18\beta^3\alpha^9 + 50\beta^2\gamma\alpha^{11} \text{ &c.}\\ + 50\gamma^2\alpha^{11} \text{ &c.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{und } 14\sin\alpha^5 = 14\alpha^5 + 68\beta\alpha^7 + 68\gamma\alpha^9 + 68\delta\alpha^{11} \text{ &c.}\\ + 114\beta^2\alpha^{11} + 228\beta\gamma\alpha^{11} \text{ &c.}\\ + 114\beta^3\alpha^{11} \text{ &c.}\end{aligned}$$

40) Ziehen wir nun den einen Werth von $\sin 3\alpha$ und $\sin 5\alpha$ rückſichtlich von einander ab, ſo erhalten wir die Werthe der Coefficienten β, γ, δ, ε, ζ &c. in Zahlen beſtimmt

$$\begin{array}{llllll} \sin 3\alpha = +3 & \alpha + 2\,3\beta & \alpha^3 + 18\,3\gamma & \alpha^5 + 1323\delta & \alpha^7 + 9483\varepsilon & \alpha^9 \text{ &c.}\\ -3\sin\alpha = -3 & \alpha - 3\beta & -3\gamma & -3\delta & -3\varepsilon & \\ +4\sin\alpha^3 = & +4 & +10\beta & +10\gamma & +10\delta & \\ & & & +10\beta^2 & +30\beta\gamma & \\ & & & & +4\beta^3 & \end{array}$$

$0 = + (3-3)\alpha + [20\beta + 4]\alpha^3 + [180\gamma + 10\beta]\alpha^5 + [1320\delta + 10\gamma + 10\beta^2]\alpha^7 + [9480\varepsilon + 10\delta + 0\beta\gamma + 4\beta^3]\alpha^9 + [86620\zeta + 10\varepsilon + 20\beta\delta + 10\beta^2\gamma + 10\gamma^2]\alpha^{11}$ &c.

41) Mithin $\beta = -\frac{1}{2.3}$, $\gamma = \frac{+1}{2.3.4.5}$, $1320\,\delta = \frac{-10}{2.3.4.5} - \frac{1}{3}$ $= \frac{-44}{2.3.4.5}$, $\delta = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$, $9480\,\varepsilon = -\frac{10.9}{2.3.4.5.6.7.9} + \frac{20.7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1.4.5.6.7}{2.3.\ \ 9} = \frac{1510}{2.3.4.5.6.7.9}$, $\varepsilon = + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$, $86620\,\zeta$ $= -\frac{10.\ \varepsilon}{2.3\ldots9.\varepsilon} - \frac{4.8.9.\varepsilon}{2.3\ldots8.9\,\varepsilon} - \frac{2.7.8.9.\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon.8.9} - \frac{6.7.8.9}{2.3\ldots9.\varepsilon}$ $= -\frac{93\varepsilon0}{2.3\ldots9.\varepsilon}$, $\zeta = -\frac{1}{2.3\ldots9} = -\frac{93\varepsilon0}{86620}\cdot\frac{1}{2.3\ldots9.\varepsilon}$ &c.

42)
$$\begin{array}{llllll}
\sin 5\alpha = & +5\,\alpha & +\varepsilon5\beta\,\alpha^3 & +1985\gamma\,\alpha^5 & +39265\delta\,\alpha^7 & +7\varepsilon2345\,\varepsilon\,\alpha^9 \ \&c.\\
-5\sin\alpha = & -5 & -5\beta & -5\gamma & -5\delta & -5\varepsilon \ \&c.\\
+18\sin\alpha^3 = & & +18 & +50\beta & +50\gamma & +50\delta\\
 & & & & +50\beta^2 & +\varepsilon0\beta\gamma\\
 & & & & & +18\beta^3\\
-14\sin\alpha^5 = & & & -14 & -68\beta & -68\gamma\\
 & & & & & -114\beta^2
\end{array}$$

$0 = + [5-5]\alpha + [\varepsilon0\beta + 18]\alpha^3 + [1980\gamma + 50\beta - 14]\alpha^5 + [39260\delta + 50\gamma + 50\beta^2 - 68\beta]\alpha^7 + [7\varepsilon2340\,\varepsilon + 50\delta + \varepsilon0\beta\gamma + 18\beta^3 - 68\gamma - 114\beta^2]\alpha^9 + [14429020\zeta + 50\varepsilon + \varepsilon0\beta\delta + 50\beta^2\gamma + 50.\gamma^2 - 68\delta - 228\beta\gamma - 114\beta^3]\alpha^{11}$ etc.

43) Folglich $\varepsilon0\beta = -18$, $\beta = -\frac{1}{2.3}$; $1980.\gamma = -50\beta + 14 = 22$,

$\gamma = + \frac{22}{1980} = + \frac{1}{2.3.4.5}$; $39260\,\delta = -50\gamma - 50\beta^2 + 68\beta$

$= -\frac{1}{2} - \frac{5}{3} - \frac{68}{2.3} = -\frac{79}{2.3}$, $\delta = -\frac{79}{2.3.39260} = -\frac{1}{2.3\ldots6.7}$,

$7\varepsilon2340\,\varepsilon = -50\delta - \varepsilon0\beta\gamma - 18\beta^3 + 68\gamma + 114\beta^2 = + \frac{50.3}{2.3\ldots7.3}$

$+ \frac{\varepsilon0.7.3}{2.3\ldots7.3} + \frac{1.8.2.5.7}{2.3\ldots7.3} + \frac{68.6.7.3}{2.3.4.5.6.7.3} + \frac{114.4.5.7.3.}{2.3\ldots7.3}$

$= + \frac{39118}{2.3\ldots7.3}$, $\varepsilon = + \frac{1}{2.3\ldots8.9}$; $14429020.\ \zeta = -[50 + \varepsilon00$

+

$$+2\varrho00+120.9+6.8.60+228.7.8.9+114.5.6.7.8].\frac{1}{2.3\ldots8.9}$$

$$-\frac{194\varepsilon70}{2.3\ldots8.9},\ \zeta=-\frac{1}{2.3\ldots8.9.\varepsilon.\varrho}\ \text{etc.}$$

44) Die durch jede der beiden Vernichtungen und Aufhebungen erhaltenen Werthe der Coefficienten ſind folglich folgende

$$\beta=-\frac{1}{2.3};\ \gamma=-\frac{\beta}{4.5}=+\frac{1}{2.3.4.5};\ \delta=-\frac{\gamma}{6.7}$$

$$=-\frac{1}{2.3\ldots6.7};\ \epsilon=-\frac{\delta}{8.9}=+\frac{1}{2.3\ldots8.9};\ \zeta=-\frac{\epsilon}{\varepsilon.\varrho}$$

$$=-\frac{1}{2.3\ldots\varepsilon.\varrho};\ \eta=-\frac{\zeta}{10.11}=+\frac{1}{2.3.4\ldots10.11}$$

45) Mithin wenn dieſe Werthe Statt der Coefficienten in der allgemeinen Gleichung

$\sin\alpha=\alpha+\beta\alpha^3+\gamma\alpha^5+\delta\alpha^7+\epsilon\alpha^9+\zeta\alpha^\varrho$ etc. geſetzt werden, ſo erhält man folgende nach einem unveränderlichen Geſetzt fortlaufende Reihe zum Finden des Sinus aus ſeinem Bogen

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{2.3}+\frac{\alpha^5}{2.3.4.5}-\frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7}+\frac{\alpha^9}{2.3.4\ldots8.9}$$

$$-\frac{\alpha^\varrho}{2.3\ldots\varepsilon.\varrho}\ \text{etc.}-\frac{\alpha^{4s-1}}{2.3.4\ldots(4s-2)(4s-1)}+\frac{\alpha^{4s+1}}{2.3\ldots4s(4s+1)}\ \text{etc.}$$

46) Gerade die nämliche unendliche Reihe, welche aus bloßem Zufall vermittelſt der Differenzial- und Integral Rechnung gefunden ward. Iſt z. B. $s=2$ ſo iſt $4s-2=6$, $4s-1=7$, $4s=8$ und $4s+1=9$; mithin

$$-\frac{\alpha^{4s-1}}{2.3.4\ldots(4s-1)}=-\frac{\alpha^7}{2.3\ldots7},+\frac{\alpha^{4s+1}}{2.3\ldots(4s+1)}=+\frac{\alpha^9}{2.3\ldots9}$$

47) Den Quercoſinus d zu finden aus ſeinen Bogen α.

Da der Quercoſinus gleich iſt dem Halbmeſſer weniger dem Sinus, ſo iſt, indem der Halbmeſſer $=1$ $\text{quercos}\,\alpha=1-\sin\alpha$ Folglich

$$\text{quercos}\,\alpha=d=1-\alpha+\frac{\alpha^3}{2.3}-\frac{\alpha^5}{2.3.4.5}+\frac{\alpha^7}{2.3\ldots6.7}$$

—

$$-\frac{\alpha^9}{2.3\ldots8.9}+\frac{\alpha^{Q}}{2.3\ldots Q}\ldots\ldots+\frac{\alpha^{4s-1}}{2.3..(4s-1)}-\frac{\alpha^{4s+1}}{2.3.3.\ldots(4s+1)}\ \&c.$$

48) Die Coſecante aus ihrem Bogen α zu finden.

$$\text{Da cosec}\,\alpha = g = \left[\alpha-\frac{\alpha^3}{2.3}+\frac{\alpha^5}{2.3.4.5}-\frac{\alpha^7}{2.3.4.7}+\frac{\alpha^9}{2.3\ldots8.9}-\frac{\alpha^{Q}}{2.3\ldots E.Q}\ldots\ldots-\frac{\alpha^{4s-1}}{2.3\ldots(4s-1)}+\frac{\alpha^{4s+1}}{2.3\ldots4s(4s+1)}\ \&c.\right]^{-1}$$

49) Würde man würklich mit dieſer unendlichen Reihe in 1 dividiren und beſtändig ins Unendliche dieſe Diviſion fortſetzen, ſo erhält man die geſetzlos fortſchreitende Reihe, welche auch in Käſtners Analyſis des Unendlichen gefunden wird.

$$g=\alpha^{-1}+\frac{1}{2.3}\alpha+\frac{12.\alpha^3}{2.3.4.5.6}+\frac{1Q.\alpha^5}{2.3\ldots6.7}+\frac{204.\alpha^7}{2.3..7.2.3.4.5.6}\ \&c.$$

4E) Den Querſinus b aus dem Bogen α zu finden.

Weil querſin $\alpha = b = 1 - \cos\alpha = 1 - c$ und $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 1 - 2\sin\alpha^2$, auch querſin $2\alpha = 1 - \cos 2\alpha = 1 - (1 - 2\sin\alpha^2) = 2\sin\alpha^2 = 4b - 2b^2$ [denn $2 - b : a = a : b$ ſo iſt, da $a = \sin\alpha$, $2b - b^2 = \sin\alpha^2$] auch $\sin\alpha^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha^4}{2.3} + \frac{28\alpha^6}{2.3.4.5.6}$ &c.

So ſetze ich, es ſei allgemein
querſin $\alpha = \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^4 + \delta\alpha^6 + \varepsilon\alpha^8 + \zeta\alpha^E + \eta\alpha^{10}$ &c.
Folglich querſin $\omega = \beta\omega^2 + \gamma\omega^4 + \delta\omega^6 + \varepsilon\omega^8 + \zeta\omega^E + \eta\omega^{10}$ &c.
und wenn $\omega = 2\alpha$ ſo iſt $\omega^n = 2^n\alpha^n$
querſin $2\alpha = \beta.2^2.\alpha^2 + \gamma.2^4.\alpha^4 + \delta.2^6.\omega^6 + \varepsilon.2^8.\alpha^8 + \zeta 2^E.\omega^E + \eta 2^{10}.\omega^{10}$ &c.

aber auch $= 2.\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3\ldots7} + \frac{\alpha^9}{2.3\ldots9}\ \&c\right)^2$

4Q) Mithin erhält man eine Gleichung die = 0 iſt, wenn man dieſe beiden von einander abzieht, ferner wenn dann alles, was

in einerlei Potenz von α multiplicirt iſt, $= 0$ ſetzt, die Werthe der Coefficienten in Zahlen beſtimmt. Alſo

$$
50)\quad 0 = \text{querſin}\, 2\alpha = \begin{array}{l} +4\beta \\ -2\sin\alpha^2 = -2 \end{array}\Big\}\alpha^2
+ \begin{array}{l} 14\gamma \\ +\frac{2.2}{2.3} \end{array}\Big\}\alpha^4
+ \begin{array}{l} 54\delta \\ -\frac{2.2.}{2.3.4.5} \\ -\frac{2}{2.3.2.3} \end{array}\Big\}\alpha^6
+ \begin{array}{l} 194\varepsilon \\ +\frac{2.2}{2.2\ldots6.7} \\ +\frac{2.2}{2.3.2.3.4.5} \end{array}\Big\}\alpha^8
+ \begin{array}{l} 714\zeta \\ -\frac{2.2}{2.3\ldots8.9} \\ -\frac{2.2}{2.3\ldots7.2.3} \\ -\frac{2}{2.3.4.5.6.18} \end{array}\Big\}\alpha^5
+ \begin{array}{l} 2454\eta \\ +\frac{2.2}{2.3\ldots\varepsilon.\varrho} \\ +\frac{2.2}{2.3\ldots9.2.3} \\ +\frac{2.2}{2^2.3^2.4^2.5^2.6.7} \end{array}\Big\}\alpha^{10}
$$

$$
0 = (4\beta - 2)\alpha^2 + \left[14\gamma + \frac{4}{6}\right]\alpha^4 + \left[54\delta - \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{2}{2.3.5}\right]\alpha^6 + \left[194\varepsilon + \frac{4}{2.3\ldots7} + \frac{4}{2.4\ldots6}\right]\alpha^8 + \left[714\zeta - \frac{4}{2.3\ldots9} - \frac{2}{2.3\ldots7.3} - \frac{1}{2.3\ldots6.\varepsilon}\right]\alpha^5 + \left[2454\eta + \frac{4}{2.3\ldots\varrho} + \frac{8.\varepsilon\varrho}{2.3\ldots\varrho10} + \frac{4}{2.3\ldots8.3.5}\right] \&c.
$$

51) Mit

51) Mithin iſt $4\beta - 2 = 0$, $4\beta = +2$, $\beta = \frac{1}{2}$; $14\gamma + \frac{4}{8}$ $= 0$, $\gamma = -\frac{1}{2.3.4}$; $54\delta - \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{2}{2.3.6} = 0$, 54δ $= \frac{20+34}{2.3.4.5.6}$, $\delta = +\frac{1}{2.3.4.5.6}$; $194\varepsilon + \frac{4}{2.3\ldots7} + \frac{4.7}{2.3\ldots7}$, $194.\varepsilon = -\frac{28}{2.3\ldots7}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2.3\ldots7.8}$; $714\zeta - \frac{4}{2.3\ldots9} - \frac{2}{2.3..7.3}$ $-\frac{7.8.9}{2.3\ldots9.\varepsilon} = 0$, $714\zeta = +\frac{4.\varepsilon + 40\,\varepsilon + 7.8.9}{2.3\ldots9.\varepsilon}$, $\zeta = +\frac{714}{714}\,\frac{1}{2.3..9.\varepsilon}$ $= +\frac{1}{2.3\ldots9\,\varepsilon}$; $2454.\eta + \frac{4.10}{23..\varrho\,10} + \frac{8.\varepsilon\,\varrho}{2.3\ldots\varrho.10} + \frac{4.3.2.\varrho\,10}{23\ldots\varrho.10}$ $= 0$, $2454.\eta = -\frac{40 - 614 - 1\varepsilon00}{2.3\ldots\ldots\varrho.10}$, $\eta = -\frac{1}{2.3\ldots\varrho.10}$

Mithin ſind die Coefficienten $\beta = +\frac{1}{2}$; $\gamma = -\frac{\beta}{3.4} = -\frac{1}{2.3.4}$; $\delta = -\frac{\gamma}{5.6} = +\frac{1}{2.3.4.5.6}$; $\varepsilon = -\frac{\delta}{7.8} = -\frac{1}{2.3\ldots7.8}$, $\zeta = +\frac{1}{2.3..9.\varepsilon}$ und $\eta = -\frac{1}{2.4\ldots\varrho.10}$.

52) Wird nun jeder unveränderliche, hier gefundene Werth eines jeden Coefficienten Statt dieſer in die obige Reihe

querſin $\alpha = \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^4 + \delta\alpha^6 + \varepsilon\alpha^8 + \zeta\alpha^{\varepsilon}$ &c. geſetzt, ſo erhält man folgende nach einem Geſetz fortlaufende unendliche Reihe zum Finden des Querſinus aus ſeinem Bogen

$$\text{querſin } \alpha = b = \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\alpha^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$
$$+ \frac{\alpha^{\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots\varrho.10} \ldots\ldots + \frac{\alpha^{4s-2}}{1.2.3\ldots(4s-2)}$$
$$- \frac{\alpha^{4s}}{1.2.3\ldots(4s-2)(4s-1)(4s)} + \frac{\alpha^{4s+2}}{1.2.3\ldots(4s+1)(4s+2)} \text{ etc.}$$

Es ſei z. B. $s = 3$ ſo iſt $1.2.3\ldots\ldots(4s-2) = 1.2.3\ldots9.\varepsilon$, $1.2.3\ldots(4s-2) = 1.2.3\ldots\varrho.10$ u. $1.2.3\ldots(4s+2) = 1.2.3\ldots11.12$ und $-\frac{\alpha^{4s}}{1.2.3\ldots(4s+1)4s} = -\frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots\varrho\,10}$

 53) Den

53) Der Coſinus c aus ſeinem Bogen α zu finden.

Weil Coſinus α = 1 — querſin α, ſo iſt c = 1 — b mithin

$$\cos\alpha = c = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots8}$$
$$- \frac{\alpha^\varepsilon}{1.2.3\ldots9.\varepsilon} + \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots\ldots\varrho.10} \ldots\ldots - \frac{\alpha^{4s-1}}{1.2.3\ldots(4s-3)(4s-2)}$$
$$+ \frac{\alpha^{4s}}{1.2.3.4\ldots\ldots(4s-1).4s} - \frac{\alpha^{4s+2}}{1.2.3\ldots\ldots(4s+1)(4s+2)} \text{ etc.}$$

54) Die Sekante g aus ihrem Bogen α zu finden.

$$\text{Da ſecant } \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{1-b} = = 1 + b + b^2 + b^3 + b^4 \text{ etc.}$$

ſo iſt

$$\text{ſecant } \alpha = \left[1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1.2\ldots\ldots7.8}\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha^\varepsilon}{123\ldots9.\varepsilon} + \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots\varrho.10} \&c.\right]^{-1}$$
$$= 1 + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{5.\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{51.\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{975.\alpha^8}{1.2.3\ldots7.8} \&c.$$
$$= 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots7.8} \&c.$$
$$+ \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{1.2.3.} + \frac{52.\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{974\,\alpha^8}{1.2.3\ldots7.8} \&c.$$

Da dieſe Reihe der Quotient aus der Diviſion einer geſetzmäſſig fortlaufenden Reihe in 1 iſt, ſo iſt ſie auch eine nach einem Geſetz fortlaufende Reihe

55) Die Tangente e aus ihrem Bogen α zu finden

$$\text{Weil tang } \alpha = \frac{\text{ſin } \alpha}{\cos\alpha} \text{ und ſin } \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} \&c.$$
$$\text{auch } \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1,2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1,2,3.4.5.6} \&c,$$

ſo iſt

e

$$e = \tang\alpha = \frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3\ldots67} + \frac{\alpha^9}{1.2.3\ldots8.9} - \frac{\alpha^{\ell}}{1.2.3\ldots\ell}\ \&c.}{1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3..6} + \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots7.8} - \frac{\alpha^{\varepsilon}}{1.2.3..9\,\varepsilon} + \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots10}\ \&c.}$$

Will man wirklich die hier angezeigte Diviſion vornehmen, ſo erhält man zum Quotienten folgende nach keinem Geſetze in Rückſicht der Coefficienten fortſchreitende Reihe

$$\tang\alpha = \alpha + \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{3.5}\alpha^5 + \frac{15.\alpha^7}{5.7.9} + \frac{52.14.8\ \alpha^9}{1.2.3\ldots8.9} + \frac{972\ \alpha^{\ell}}{3.5.7.9.\ell.5.9}\ \&c.$$

56) Die Cotangente f aus ihrem Bogen α zu finden.

Indem $\cotang\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = f$, ſo iſt

$$f = \cot\alpha = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3\,4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1.2\ldots8} - \frac{\alpha^{\varepsilon}}{1.2.3.\,\varepsilon} + \frac{\alpha^{10}}{1.2.3.\,10}\ \&c.}{\alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{\alpha^9}{1.2.3.8.9} - \frac{\alpha^{\ell}}{1.2.3..\,\varepsilon.\ell}\ \&c.}$$

57) Die Diviſion würklich vorgenommen, giebt folgende ohne Geſetz fortſchreitende Reihe

$$\cot\alpha = f = \alpha^{-1} - \tfrac{1}{3}\alpha - \frac{1}{3.5\,3}\alpha^3 - \frac{2}{3.5.7.9}\alpha^5 - \frac{1}{3.5.7.9.5}\alpha^7\ \&c.$$

58) Gerade die nämlichen analytiſchen Ausdrücke zum Finden des Sinus, Querſinus, Coſinus, Quercoſinus, der Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante aus ihrem gemeinſchaftlichen Bogen α, die wir hier gefunden haben, gab der Zufall den Differenzial- und IntegralRechnenKünſtlern. Die zu FehlSchlüſſen verleitende Differenzial- und IntegralRechnung leitete ſie zufälliger Weiſe durch einen neuen Fehler vom falſchen Wege auf die jezt erſt hier wiſſenſchaftlich von mir erwieſenen analytiſchen, oder tranſcendentalen Reihen.

59) Zur kürzern Ueberſicht ſtelle ich endlich hier die durch unſere zeitherigen Unterſuchungen erhaltenen allgemeinſten Grund-Formeln, zum Finden trigonometriſcher Linien, auf.

Wenn der Halbmeßer = 1 ſo ſei ſein Bogen = α deßen Sinus = a, Tangente = e, Querſinus = b.

5E) $\alpha = a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9 \ldots\ldots + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(4s-1)(4s-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots(4s)(4s+1)}a^{4s+1} + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(4s+1)^2}{2.3.4.5.6.7\ldots(4s+3)}a^{4s+3}$ &c.

$\alpha = 2\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} \ldots + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(4s-3)(4s-3)}{2.3.4.5.6.7\ldots(4s-2)(4s-1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4s-1}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5\ldots(4s-1)(4s-1)}{2.3.4.5.6.7\ldots(4s)(4s+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4s+1}{2}}$ &c.

$\alpha = e - \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} - \frac{e^7}{7} + \frac{e^9}{9} - \frac{e^{Q}}{Q} \ldots\ldots - \frac{e^{4s-1}}{(4s-1)} + \frac{e^{4s+1}}{(4s+1)}$ &c.

5Q) $a = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{\alpha^9}{1.2.3\ldots9} \ldots\ldots - \frac{\alpha^{4s-1}}{1.2.3\ldots(4s-1)} + \frac{\alpha^{4s+1}}{1.2.3\ldots(4s+1)}$ &c.

$b = \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots8} + \frac{\alpha^{E}}{1.2.3\ldots9.E} - \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots Q.10} \ldots\ldots + \frac{\alpha^{4s-2}}{1.2.3\ldots(4s-2)} - \frac{\alpha^{4s}}{1.2.3\ldots(4s)} + \frac{\alpha^{4s+2}}{1.2.3\ldots(4s+2)}$ &c.

Und e =

$$\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{\alpha^9}{1.2.3\ldots9} - \frac{\alpha^{Q}}{1.2.3\ldots Q} \text{ \&c.}}{1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \frac{\alpha^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots8} - \frac{\alpha^{E}}{1.2.3\ldots E} + \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots10} \text{ \&c.}}$$

60)

60) Aus dieſen hier von mir zuerſt, und mir bewußt, nie wißenſchaftlich bewießenen — trigonometriſchen Formeln leite ich nun die nachfolgenden ganz neuen ab. In der zweiten Hälfte dieſes Werkchens werden wir jezt die auf dieſe Reihen gegründeten, und daraus abgeleiteten Formeln aus des einfachen Bogens Sinus, Querſinus &c. folglich auch aus dem Halbmeßer den Sinus, Querſinus des vielfachen Bogens, oder des wie vielten Theils des einfachen Bogens zu finden, aufſtellen, es waren ſo viel mir bewußt, wol einige, allein noch nirgends alle vorhanden.

Formeln aus des einfachen Bogens Sinus, Querſinus ꝛc. folglich auch aus dem Halbmeſſer den Sinus, Querſinus ꝛc. des vielfachen Bogens oder des wievielten Theils des einfachen Bogens zu finden.

61) Es iſt wie bekannt und wißenſchaftlich jezt bewießen worden iſt, wenn der Halbmeßer = 1 angenommen wird.

$$a = \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{\alpha^9}{1.2.3\ldots9}$$

$$- \frac{\alpha^{Q}}{1.2.3..\varepsilon.Q} \text{ \&c. } (1^{\circ}) \text{ alſo auch}$$

$$x = \sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\omega^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{\omega^9}{1.2.3\ldots9}$$

$$- \frac{\omega^{Q}}{1.2.3\ldots Q} \text{ \&c. Eben ſo iſt auch}$$

$$b = \text{querſin}\,\alpha = \frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{\alpha^8}{1.2.3\ldots8}$$

$$+ \frac{\alpha^{\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\alpha^{10}}{1.2.3\ldots10} \text{ \&c. } (1^{1})$$

$$y = \text{querſin}\ \omega = \frac{\omega^2}{1.2} - \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\omega^8}{1.2.3\ldots8}$$
$$+ \frac{\omega^\varepsilon}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\omega^{10}}{1.2.3\ldots10} \text{ \&c. } (2')$$

62) Iſt nun zuvörderſt $\omega = n\alpha$, alſo $\omega^3 = n^3\alpha^3$, $\omega^5 = n^5\alpha^5$ Folglich iſt $\sin\omega = \sin n\alpha$, $\text{querſin}\ \omega = \text{querſin}\ n\alpha$ und

$$x = \sin n\alpha = n.\alpha - \frac{n^3\alpha^3}{1.2.3.} + \frac{n^5.\alpha^5}{1.2.3.4.5} + \frac{n^7.\alpha^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{n^9.\alpha^9}{1.2.3\ldots9}$$
$$- \frac{n^\varphi.\alpha^\varphi}{1.2.3\ldots\varphi} \text{ \&c. } (3^\circ)$$

$$y = \text{querſin}\ n\alpha = \frac{n^2.\alpha^2}{1.2} - \frac{n^4.\alpha^4}{1.2.3.4} + \frac{n^6.\alpha^6}{1.2.3\ldots6} - \frac{n^8.\alpha^8}{1.2.3\ldots8}$$
$$+ \frac{n^\varepsilon.\alpha^\varepsilon}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{n^{10}.\alpha^{10}}{1.2.3\ldots10} \text{ \&c. } (3')$$

63) Da das hier Gefolgerte beſtändig wahr bleibt, es mag n den Werth einer ganzen Zahl, eines uneigentlichen oder eigentlichen Bruches annehmen, d. i. es mag $n = 2, = 100, = 78$, &c. oder $n = \frac{s}{m}$ oder $n = \frac{1}{m}$ ſein, wo $s > m$ und auch $s < m$ ſein kann.

Denn es kann ja auch $\omega = \frac{s}{m}\alpha$ oder $\omega = \frac{1}{m}\alpha$ geſetzt werden, und dann wäre erſtlich

$$\sin\omega = \sin\frac{s}{m} = \frac{s.\alpha}{m} - \frac{s^3.\alpha^3.m^{-3}}{1.2.3} + \frac{s^5.\alpha^5.m^{-5}}{1.2.3.4.5.} - \frac{s^7.\alpha^7.m^{-7}}{1.2.3\ldots7}$$
$$+ \frac{s^9.\alpha^9.m^{-9}}{1.2.3\ldots9} - \frac{s^\varphi.\alpha^\varphi.m^{-\varphi}}{1.2.3\ldots\varphi} \text{ \&c. } (4^\circ)$$

$$\text{querſin}\ \omega = \text{querſin}\ \frac{s}{m}\alpha = \frac{s^2.\alpha^2.m^{-2}}{1.2} - \frac{s^4\alpha^4m^{-4}}{1.2.3.4} + \frac{s^6\alpha^6m^{-6}}{1.2.3.4.5.6}$$
$$- \frac{s^8\alpha^8m^{-8}}{1.2.3\ldots8} + \frac{s^\varepsilon\alpha^\varepsilon m^{-\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{s^{10}\alpha^{10}m^{-10}}{1.2.3\ldots10} \text{ ect. } (4')$$

$$\text{querſin}\ \omega = \text{querſin}\ \frac{1}{m}\alpha = \frac{\alpha^2m^{-2}}{1.2} - \frac{\alpha^4m^{-4}}{1.2.3.4} + \frac{\alpha^6m^{-6}}{1.2.3\ldots6}$$
$$- \frac{\alpha^8m^{-8}}{1.2.3\ldots8} + \frac{\alpha^\varepsilon m^{-\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\alpha^{10}m^{-10}}{1.2.3\ldots10} \text{ etc. } (5')$$

$$\sin\omega = \sin\frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\alpha^3 m^{-3}}{1.2.3} + \frac{\alpha^5 m^{-5}}{1.2.3.4.5} - \frac{\alpha^7 m^{-7}}{1.2.3...7} + \frac{\alpha^9 m^{-9}}{1.2.3...9}$$
$$+ \frac{\alpha^Q m^{-Q}}{1.2.3...Q} \text{ etc. } (5^\circ)$$

Es gilt uns alſo gleich viel, was für Werthe n nach und nach annehmen kann, ob es einer ganzen Zahl oder einem Bruche gleich ſei, deßen Zähler größer oder kleiner als der Nenner iſt. Dies macht ganz und gar keinen Unterſchied beim Suchen des Ausdruckes, den Sinus, Querſinus, etc. des Bogens $n\alpha$ aus des einfachen Bogens α Sinus, Querſinus etc. zu finden: n mag einen Bruch, eine potenzial oder exponential Größe bedeuten, denn n kann ja nach gerade unter den unendlichen Werthen, auch den Werth von $\frac{s}{m}$ oder von $\frac{1}{m}$ annehmen. Man kann ja auch den Sinus von $\frac{s}{m}\alpha$ von $\frac{\alpha}{m}$ in einer Function des einfachen Bogens α verlangen.

64) Da der Sinus und der Querſinus benebſt dem Halbmeßer oder Sinus totus die GrundLinien oder GrundGrößen ſind, aus denen ſich alle übrigen zum Cirkel gehörigen trigonometriſchen Linien oder Größen berechnen und ableiten laßen, ſo haben wir nur den Sinus und Querſinus des Bogens $n.\alpha$ aus des einfachen Bogens α Sinus und Querſinus etc. in einer Function ſolcher Linien zu beſtimmen, und ſo mit finden ſich dann die übrigen ſechs auch.

65) Zuvörderſt wollen wir in die bekannte unendliche Reihe: den Bogen α aus ſeinem Sinus = a zu finden, ſtatt der Coefficienten in Zahlen die unbeſtimmten Buchſtaben $\beta\ \gamma\ \delta\ \epsilon\ \zeta$ &c. ſetzen und dann dieſe Reihe in die 2te, 3te, 4te, 5te &c. Potenz erheben. Alſo es ſei einſtweilen

$$\alpha = a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9 \ \&c.$$
$$= a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \epsilon a^9 + \zeta a^{11} \ \&c.$$

ſo

ſo iſt

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha^2 = a^2 & +2\beta\, a^4 & +2\gamma\big]\, a^6 & +2\delta\big]\, a^8 & +2\varepsilon\big]\, a^{\epsilon} & +2\zeta\big]\, a^{1c}\ \&c. \\
 & & +\beta^2\big] & +2\beta\gamma\big] & +2\beta\delta\big| & +\beta\varepsilon\big| \\
 & & & & +\gamma^2\big] & +2\gamma\delta\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\alpha^3 = a^3 & +3\beta\, a^5 & +3\gamma\big]\, a^7 & +3\delta\big]\, a^9 & +3\varepsilon\big]\, a^{\varrho}\ \&c. \\
 & & +3\beta^2\big] & +6\beta\gamma\big| & +6\beta\delta\big| \\
 & & & & +3\gamma^2\big| \\
 & & & +\beta^3\big] & +3\beta^2\gamma\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\alpha^4 = a^4 & +4\beta\big]\, a & +4\gamma\big]\, a^8 & +4\delta\big]\, a^{\epsilon} & +4\varepsilon\big]\, a^{10}\ \text{etc.} \\
 & & +6\beta^2\big] & +10\beta\gamma\big| & +10\beta\delta\big| \\
 & & & & +6\gamma^2\big| \\
 & & & +4\beta^3\big] & +10\beta^2\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\alpha^5 = a^5 & +5\beta\big]\, a^7 & +5\gamma\big]\, a^9 & +5\delta\big]\, a^{\varrho}\ \&c. \\
 & & +\epsilon\beta^2\big] & +18\beta\gamma\big| \\
 & & & +\epsilon\beta^3\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\alpha^9 = a^6 & +6\beta\big]\, a^8 & +6\gamma\big]\, a^{\epsilon} & +6\delta\big]\, a^{10}\ \text{etc.} \\
 & & +13\beta^2\big] & +24\beta\gamma\big| \\
 & & & +18\beta^3\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha^7 = a^7 & +7\beta\big]\, a^9 & +7\gamma\big]\, a^{\varrho}\ \&c. \\
 & & +19\beta^2\big]
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha^8 = a^8 & +8\beta\big]\, a^{\epsilon} & +8\gamma\, a^{10}\ \text{etc.} \\
 & & +24\beta^2\big]
\end{array}$$

$\alpha^9 = a^9 + 9\beta\big]\, a^{\varrho}$ etc.

$\alpha^{\epsilon} = a^{\epsilon} + \epsilon\beta\, a^{10}$ etc.

$\alpha^{\varrho} = a^{\varrho}$ etc.

$\alpha^{10} = a^{10}$ etc.

66) **Den Sinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus des Bogens α zu finden.**

Man erinnere ſich, daß

$$\sin n\alpha = n\alpha - \frac{n^3\alpha^3}{1.2.3} + \frac{n^5\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \frac{n^7\alpha^7}{1.2.3...7} + \frac{n^9\alpha^9}{1.2.3..9} - \frac{n^{\varrho}\alpha^{\varrho}}{1.2.3..\varrho}\ \text{etc.}$$

Nun war aber $\alpha = a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7$ etc. und in (65) iſt allgemein $\alpha = a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9 + \zeta a^{\varrho}$ etc. geſetzt worden. Folglich iſt

$\alpha^3 = (a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9 + \zeta a^{\varrho}\ \text{etc.})^3$ und überhaupt

$\alpha^s = (a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9 + \zeta a^{\varrho}\ \text{etc.})^s$ alſo iſt auch

n

$n\alpha = (na + n\beta a^3 + n\gamma a^5 + n\delta a^7 + n\varepsilon a^9 + n\zeta a^{ϙ}\ \text{etc.})$ und
$n^3\alpha^3 = (na + n\beta a^3 + n\gamma a^5 + n\delta a^7 + n\varepsilon a^9 + n\zeta a^{ϙ}\ \text{etc})^3$ mithin überhaupt

$$n^s\alpha^s = (na + n\beta a^3 + n\gamma a^5 + n\delta a^7 + n\varepsilon a^9 + n\zeta a^{ϙ}\ \text{etc.})^s$$

67) Man ſetze daher in obige Gleichung, die in 65 erhaltenen Werthe für die 1te, 3te, 5te, 7te 9te und ϙte Potenz von α, ſo erhält man eine Formel für den Sinus, von $n\alpha$ in einer Function von $\sin\alpha = a$ Nämlich

	a	a^3	a^5	a^7	a^9	$a^{ϙ}$ &c
$n.\alpha =$	n	$+n\beta$	$+n\gamma$	$+n\delta$	$+n\varepsilon$	$+n\zeta$
$-\frac{n^3.\alpha^3}{1.2.3} =$		$-\frac{n^3}{1.2.3}$	$-\frac{n^3.3\beta}{1.2.3}$	$-\frac{n^3\,3\gamma}{1.2.3}$ $-\frac{n^3\,3\beta^2}{1.2.3}$	$-\frac{n^3\,3\delta}{1.2.3}$ $-\frac{n^3.6\beta\gamma}{1.2.3}$ $-\frac{n^3\beta^3}{1.2.3}$	$-\frac{n^3.3.\varepsilon}{1.2.3}$ $-\frac{n^3.6\beta\delta}{1.2.3}$ $-\frac{n^3.3\beta^2\gamma}{1.2.3}$ $-\frac{n^3\,3\gamma^2}{1.2.3}$
$+\frac{n^5\alpha^5}{1.2.3.4.5} =$			$+\frac{n^5}{1.2.3.4.5}$	$+\frac{n^5.5\beta}{1.2.3.4.5}$	$+\frac{n^5.5\gamma}{1.2.3.4.5}$ $+\frac{n^5.\varepsilon\beta^2}{1.2.3.4.5}$	$+\frac{n^5\,5\delta}{1.2.3.4.5}$ $+\frac{n^5.18\beta\gamma}{1.2.3.4.5}$ $+\frac{n^5.\varepsilon\beta^3}{1.2.3.4.5}$
$-\frac{n^7.\alpha^7}{1.2.3...7} =$				$-\frac{n^7}{1.2.3...7}$	$-\frac{n^7.7\beta}{1.2.3...7}$	$-\frac{n^7.7\gamma}{1.2.3...7}$ $-\frac{n^7.19\beta^2}{1.2.3...7}$
$+\frac{n^9.\alpha^9}{1.2.3...9} =$					$+\frac{n^9}{1.2.3...9}$	$+\frac{n^9.9\beta}{1.2.3..9}$
$-\frac{n^{ϙ}.\alpha^{ϙ}}{1.2.3...ϙ} =$						$-\frac{n^{ϙ}}{1.2.3..ϙ}$

Alſo iſt, wenn man alles, was in einerlei Potenz von a multiplicirt iſt, addirt:

$$\sin n\alpha = a.n - a^3.\left[\frac{n^3 - 2.3.\beta.n}{1.2.3.}\right] + a^5\left[\frac{n^5 - n^3\,3.4.5\beta + n.2.3.4.5.\gamma}{1.2.3.4.5}\right]$$
$$- a^7\left[\frac{n^7 - n^5.5.6.7\,\beta + n^3.3.4.5.6.7(\beta^2+\gamma) - n.2.3.4.5.6.7\delta}{1.2.3.4.5.6.7}\right] + a^9.$$

$[n^9 - n^7 . 7.8.9.\beta + n^5 . 5.6.7.8.9\,(2.\beta^2 + \gamma) - n^3 . 4.5.6.7.8.9.$
$(\beta^3 + 6\beta\gamma + 3\delta) + n.2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon] . \frac{1}{1.2.3\ldots9} - \frac{a^{\varrho}}{1.2.3\ldots\varrho} .$
$[n^{\varrho} - 9.\varepsilon.\varrho.n^9.\beta + n^7.(3\beta^2 + \gamma).7.8.9.\varepsilon.\varrho - n^5.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho$
$(2\beta^2 + 4\beta\gamma + \delta) + n^3.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho.(\gamma^2 + \beta^2\gamma + 2\beta\delta + \varepsilon)$
$- n.1.2.3\ldots\varrho.\zeta]$ etc.

68) Werden nun in dieſe lezte Gleichung die nur einſtweilen unbeſtimmt angenommenen Werthe der Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ etc. in Zahlen geſezt, nämlich $\beta = \frac{1.1}{2.3}$, $\gamma = \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}$, $\delta = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$, $\varepsilon = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$, $\zeta = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho}$, ſo erhält man nach und nach folgende allgemeine Gleichung, und es wird zuvörderſt

$na = na$; 2) $- \frac{a^3}{1.2.3}[n^3 - 1.2.3\,\beta n] = - \frac{a^3}{1.2.3}[n^3 - 1^2 n]$
$= - \frac{n(n^2 - 1^2)}{1.2.3.} a^3$; 3) $+ \frac{a^5}{1.2.3.4.5}[n^5 - n^3.3.4.5.\beta$
$+ n.2.3.4.5\gamma] = + \frac{a^5}{1.2.3.4.5}[n^5 - \varepsilon.n^3.1^2 + n.1^2.3^2]$
$= + \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 3\ )}{1.2.3.4.5.} a^5$; 4) $- \frac{a^7}{1.2.3..7} . [n^7 - n^5 5.6.7.\beta$
$+ n^3.3.4.5.6.7.(\beta^2 + \gamma) - n.2.3.4.5.6.7.\delta] = - \frac{a^7}{1.2.3\ldots.7} .$
$[n^7 - 2\varrho\,1^2 n^5 + 197 n^3 + n\,1^2.3^2.5^2] = - \frac{n(n^2 - 1^2)}{1.2.3.} .$
$\frac{(n^2 - 3^2)(n^2 - 5^2)}{4.5.6.7.} . a^7$; 5) $+ \frac{a^9}{1.2.3\ldots9} . [n^9 - n^7.7.8.9\beta$
$+ n^5.5.6.7.8.9\,(2\beta^2 + \gamma) - n^3.4.5.6.7.8.9.\ \beta^3 + 6\beta\gamma$
$+ 3\delta) + n.2.3\ldots9.\varepsilon] = + \frac{a^9}{1.2.3\ldots9} . [n^9 - 70\,n^7$
$+ 1186\,n^5 - 7584.\,n^3 + n.\,1^2.3^2.5^2.7^2]$
$= + \frac{n(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)(n^2 - 5^2)(n^2 - 7^2)}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} a^9$; 6) $- \frac{a^{\varrho}}{1.2.3\ldots.\varrho} .$
$[n^{\varrho} - 9.\varepsilon.\varrho\,n^9\beta + n^7.7.8.9.\varepsilon.\varrho\,(3\beta^2 + \gamma) - n^5.$
$5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho\,(2\beta^2 + 4\beta\gamma + \delta) + n^3.3.4\ldots\varepsilon.\varrho.\ (\gamma^2$
$+ \beta^2\gamma + 2\beta\delta + \varepsilon) - n.1.2.3\ldots\varrho.\zeta] = - \frac{a^{\varrho}}{1.2.3\ldots\varrho} .$

$[n^{\varrho}$

$$[n - 119 . n^9 + 4\varrho\varrho 6 n^7 - 7930\varepsilon n^5 + 42\varrho 999 n^3 - n . 1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 9^2] = - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2) \ldots (n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \ldots \varepsilon . \varrho} . a^\varrho$$

u. ſ. w. Mithin iſt

$$\text{ſin}\, n\alpha = na - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3} a^3 + \frac{n(n^2-1^2)\ (n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} a^5$$

$$- \frac{n\ (n^2-1^2)\ (n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.} a^7$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)\ (n^2-3^2)\ (n^2-5^2)\ (n^2-7^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} a^9$$

$$- \frac{n(n^2-1^2)\ (n^2-3^2) \ldots (n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ldots \varepsilon . \varrho} a^\varrho$$

$$\ldots + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2) \ldots (n^2-(4s-1)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \ldots 4s\ (4s+1)} a^{4s+1}$$

$$- \frac{n\ (n^2-1^2)\ (n^2-3^2) \ldots}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5. \ldots} . \frac{(n^2-(4s-1)^2)(n^2-(4s+1)^2)}{4s.(4s+1) \ldots (4s+2)(4s+3)} a^{4s+3} \ \&c.$$

69) Dieſer nämliche Ausdruck, welcher in einer Reihe nach einem allgemeinen Geſetz fortlaufender Glieder beſteht, läßt ſich auch entwickeln aus der in Käſtners Anfangs-Gründen der Analyſis endlicher Größen pag. 103 ſtehenden und bewießenen allgemeinen Formel, den Sinus des n fachen Bogens aus dem Sinus und Coſinus des einfachen Bogens zu finden. Ich ſetze ſie hierher mit etwas veränderten Zeichen, indem ich c Satt b ſetze. Es ſei $c = \cos\alpha$, $a = \text{ſin}\,\alpha$, ſo iſt

$$\text{ſin}\ n\alpha = c^{n-1} a - \frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.\ 2.\ 3.} c^{n-3} a^3$$

$$+ \frac{n(-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ 5} c^{n-5} a^5 - \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{1.\ 2 \ldots 7} c^{n-7} a^7$$

$$+ \frac{n(n-1) \ldots (n-8)}{1.\ 2. \ldots 9} c^{n-9} a^9 - \frac{n(n-1) \ldots (n-\varepsilon)}{1.\ 2. \ldots \varrho} c^{n-\varrho} a^\varrho$$

$$\ldots - \frac{n(n-1) \ldots (n-4s+3)\ (n-4s+2)}{1.2.3. \ldots (4s-2)\ (4s-1)} c^{n-4s+1} a^{4s-1}$$

$$+ \frac{n(n-1) \ldots (n-4s)}{1.\ 2 \ldots (4s+1)} c^{n-4s-1} a^{4s+1} \ \&c.$$

Nun

Nun iſt aber $c = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ mithin $c^n = (1 - a^2)^{\frac{n}{2}}$, $c^{n-1} = (1 - a^2)^{\frac{n-1}{2}}$, $c^{n-3} = (1 - a^2)^{\frac{n-3}{2}}$, $c^{n-5} = (1 - a^2)^{\frac{n-5}{2}}$ u. ſ. w. Folglich wird, wenn dieſe Werthe in obige Gleichung geſetzt werden, die folgende daraus

$$\sin n\alpha = n a.\ (1-a^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n(n-1)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.} a^3 (1-a^2)^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.\ a^5 (1-a^2)^{\frac{n-5}{2}} - \frac{n(n-1)\ldots.(n-6)}{1.\ 2.\ \ldots.\ 7} a^7 (1-a^2)^{\frac{n-7}{2}} + \frac{n(n-1)\ldots(n-8)}{1.\ 2\ \ldots.\ 9} (1-a^2).^{\frac{n-9}{2}} - \frac{n(n-1).\,.(n-\varepsilon)}{1.\ 2\ \ldots\ \varrho} a^\varrho (1-a^2)^{\frac{n-\varrho}{2}} \&c. \ldots. - \frac{n(n-1)\ \ldots.\ (n-4s+2)}{1.\ 2.\ \ldots..\ (4s-1)} a.^{4s-1}(1-a^2)^{\frac{n-4s+1}{2}} + \frac{n(n-1)\ldots.(n-4s)}{1.\ 2.\ \ldots.\ (4s+1)} a^{4s+1} (1-a^2)^{\frac{n-4s-1}{2}} \&c.$$

6ε) Nun iſt nach dem Binomiſchen Lehrſatz $(a-b)^m = a^m - m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1) m-2\ m-3}{1.\ 2.\ 3\ \ 4} a^{m-4} b^4$ &c. Allein hier iſt $a = 1$ und $b = a^2$ und m nach und nach $= \frac{n-2}{2}, = \frac{n-3}{2}, = \frac{n-5}{2}, = \frac{n-7}{2}, = \frac{n-9}{2}, = \frac{n-\varrho}{2}.$&c. Mithin iſt $n a\ (1-a^2)^{\frac{n-1}{2}}$

$$= n a - \frac{n(n-1)}{1.\ 3} a^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{2.\ 4} a^5 - \frac{n(n-1)(n+3)}{2\ .\ 4}.\ \frac{n-5}{6} a^7 + \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8} a^9 - \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)(n-9).}{1\ .\ 2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ \varepsilon} a^\varrho \ \&c.;$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3 (1-a^2)^{\frac{n-3}{2}} = - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.\ a^3$$

+

$$+\frac{n(n-1)(n-2).(n-3)}{1\;\;2\;\;2\;\;2}a^5-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}.\frac{(n-3)(n-5)}{2.\;4}a^7$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}.\frac{(n-3)(n-5)(n-7)}{2.\;4.\;6}a^9-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}.$$

$$\frac{(n-3)(n-5)(n-7)(n-9)}{2\;\;4\;\;6\;\;8}a^{\varrho}\ \&c.;+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3.\;4\;\;5}a^5$$

$$(1-a^2)^{\frac{n-5}{2}}=+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1\;\;2\;\ldots\;5}a^5-\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\;2\;\ldots\;5}.\frac{n-5}{2}a^7$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\;2.\ldots\;5}.\frac{(n-5)(n-7)}{2.\;4}a^9-\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\;2.\ldots\;5}.$$

$$\frac{(n-5)(n-7)(n-9)}{2\;\;4\;\;6}a^{\varrho}\ \&c.;$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\;2.\;3\;\ldots\;7}.a^7.(1-a^2)^{\frac{n-7}{2}}=$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\;2.\;3.\ldots\;7}a^7+\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1\;\;2\;\ldots\;7}.\frac{n-7}{2}.a^9$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.\;2\ldots\ldots 7}\frac{(n-7)(n-9)}{2.\;4.}a^{\varrho}\ \text{etc.};$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{1.\;2\;\;3\ldots\;9}a^9(1-a^2)^{\frac{n-9}{2}}$$

$$=+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{1.\;2.\;3\ldots\;9}.a^9-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{1.\;2.\;3\ldots\;9}.$$

$$\frac{n-9}{2}a^{\varrho}\ \text{etc.};$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varrho)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots\varrho}.a^{\varrho}(1-a^2)^{\frac{n-\varrho}{2}}$$

$$=-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varrho)}{1.\;2.\;3\ldots\ldots\varrho}a^{\varrho}\ \text{etc.}$$

Addirt man nun alles, was in einerlei Potenz von a multiplicirt iſt, zuſammen, ſo erhält man nach und nach

$$\text{ſin}\ n\alpha=na-a^3.\left[\frac{n(n-1)}{1.\;2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}\right]+a^5.\left[\frac{n(n-1)(n-3)}{2.\;4},\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5}\right]$$

$$-a^7.\left[\frac{n.(n-1).(n-3)(n-5)}{1.\;2.\;4.\;6}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{1.\;2.\;3.\;2.\;4}\right.$$

+

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2\ .3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{(n-5)}{2}+\frac{n(n-1)\dots(n-6)}{1.\ 2.\ \dots\ 7}\Big]$$

$$+a^9\Big[\frac{n(n-1)(n-3)\dots(n-9)}{1.\ 2\ \ 4\ \ \varepsilon}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-3)(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4.\ \ 6}+\frac{n(n-1)\dots(n-4)}{1.\ 2.\ \dots\ 5}\cdot\frac{(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4}$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-6)}{1.\ 2\ \dots\ 7}\cdot\frac{(n-7)}{2}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-8)}{3\ \ 4\ \dots\ 9}\Big].$$

$$-a^{Q}.\Big[\frac{n(n-1)(n-3)\dots(n-9)}{2.\ \ 4\ \dots\ \varepsilon}+\frac{n(n-7)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3}\cdot\frac{(n-3)(n-5)(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4.\ \ 6.\ \ 8}+\frac{n(n-1)\dots(n-4)}{1.\ 2.\ \dots\ 5}\cdot$$

$$\frac{(n-5)(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4.\ \ 6}+\frac{n(n-1)\dots(n-6)}{1.\ 2\ \dots\ 7}\cdot\frac{(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4}$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-8)(n-9)}{1.\ 2\ \dots\ 9\ .\ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3\ \dots\ Q}\Big]\text{ etc.}$$

$$=na-\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5-\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot$$

$$\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dots\ \varepsilon.\ Q}a^{Q}\dots$$

$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots\dots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dots\dots(4s-2)(4s-1)}a^{(4s-1)}$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-(4s-3)^2)(n^2-(4s-1)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dots(4s-2)(4s-1).\ 4s.\ (4s+1)}a^{4s+1}\ \&c.$$

6Q. Den Querſinus des Bogens nα aus dem Sinus a des Bogens α zu finden.

Bekannter Maßen fanden wir oben, daß

$$\text{querſin}\,\alpha=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{2.3.4}+\frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6}-\frac{\alpha^8}{2.3.4.5.6.7.8}+\frac{\alpha^{\varepsilon}}{2.3\dots\varepsilon}-\frac{\alpha^{10}}{2.3\dots\dots10}\ \&c.\quad(1')$$

ferner in (62) daß

$$\text{querſin}\,n\alpha=\frac{n^2.\alpha^2}{2}-\frac{n^4\alpha^4}{2.3.4}+\frac{n^6\alpha^6}{2.3\dots6}-\frac{n^8\alpha^8}{2.3\dots8}+\frac{n^{\varepsilon}\alpha^{\varepsilon}}{2.3\dots\varepsilon}-\frac{n^{10}\alpha^{10}}{2.3\dots10}\ \&c.\quad(2')$$

Nun

Nun iſt aber $\alpha = a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\mathcal{Q}}a^{\mathcal{Q}}$ &c. Es wurden aber $\alpha = a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9 + \zeta a^{\mathcal{Q}}$ &c. allgemein geſetzt, von welcher unendlichen Reihe ſich in (65) die 2te, 4te, 6te 8te, εte und 10te Potenz befindet. Setzt man nun dieſe dort befindlichen Werthe von $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{\varepsilon}, \alpha^{10}$, &c. hier in die Gleichung (2′) und bringt alles, was in einerlei Potenz multiplicirt iſt, in eine Columne unter einander, addirt dann ſolche verſchiedenen Coefficienten und Producte zuſammen, ſo erhält man den Coefficienten, welcher mit jedweder Potenz von a multiplicirt iſt.

$+\frac{n^2}{2}\alpha^2 =$	$\frac{n^2}{2}.$ a^4	$+\frac{n^2.2\beta}{2}$ a^4	$+\frac{n^2.2\gamma}{2}$ $+\frac{n^2\ \beta^2}{2}$ a^6	$+\frac{n^2.2\delta}{2}$ $+\frac{n^2\ 2\beta\gamma}{2}$ a^8	$+\frac{n^2.2.\varepsilon}{2}$ $+\frac{n^2.2\beta\delta}{2}$ $+\frac{n^2.\gamma^2}{2}$ a^{ε}	$+\frac{n^2.2.\zeta}{2}$ $+\frac{n^2.2\beta\varepsilon}{2}$ $+\frac{n^2.2\gamma\delta}{2}$ a^{10} &c.
$-\frac{n^4}{1.2.3.4}\alpha^4 =$		$-\frac{n^4}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\beta}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\beta^2}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\delta}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.10\beta\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.4\beta^3}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4.\varepsilon}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4\ 10\beta\delta}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\beta^2\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\gamma^2}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.\beta^4}{1.2.3.4}$
$-\frac{n^6}{1.2.3.4.5.6}\alpha^6 =$			$+\frac{n^6}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\beta}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\gamma}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6.13\beta^2}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\delta}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6.26\beta\gamma}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6\ 18\beta^3}{1.2.3.4.5.6}$
$-\frac{n^8}{1.2.3...8}\alpha^8 =$				$-\frac{n^8}{1.2.3...8}$	$-\frac{n^8.8\beta}{1.2.3...8}$	$-\frac{n^8.8\gamma}{1.2.3...8}$ $-\frac{n^8.24\beta^2}{1.2.3...8}$
$+\frac{n^{\varepsilon}}{1.2.3...\varepsilon}\alpha^{\varepsilon} =$					$+\frac{n^{\varepsilon}}{1.2.3...\varepsilon}$	$+\frac{n^{\varepsilon}.\varepsilon\beta}{1.2.3...\varepsilon}$
$-\frac{n^{10}}{1.2.3...10}\alpha^{10} =$						$-\frac{n^{10}}{1.2.3...10}$

$$\text{querſin } n\alpha = \frac{n^2}{2}\alpha^2 - \left[\frac{n^4 - 2.3.4\ n^2\beta}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\right]a^4 + [n^6 - n^4.\ 4.5.6\beta + n^2.\ 3.4.\ 5.6.\ (\beta^2 + 2\gamma)]\frac{a^6}{1.2.3\ldots6} - [n^8 - n^6.\ 6.7.8\beta + n^4.\ 5.6.7.8\ (6\beta^2 + 4\gamma) - n^2.\ 2.3.4.5.6.7.8\ (\beta\gamma + \delta)]\frac{a^8}{1.2.3\ldots8} + [n^\varepsilon - n^8.\ 8.9.\varepsilon\beta + n^6.\ 7.8.9.\varepsilon(^13\beta^2 + 6\gamma) - n^4.5.6.7.8'9.\varepsilon(\beta^3 + 3\beta\gamma + \delta) + n^2.\ 3.4.5\ldots\varepsilon(\gamma^2 + 2\beta\delta + 2.\varepsilon)].\frac{a^\varepsilon}{1.2.3\ldots\varepsilon} - [n^{10} - n^\varepsilon.\varepsilon.\varrho.10\beta + n^8.\ 9.\varepsilon.\varrho.\ 10\ (24.\ \beta^2 + 8\gamma) - n^6.\ 7.8.9.\ \varepsilon\ \varrho.\ 10\ (18\beta^3 + 26\beta\gamma + 6\delta) + n^4.\ 5.6.7.8.9.\ \varepsilon.\varrho.10.\ (\beta^4 + 6\gamma^2 + 6\beta^2\gamma + 10\beta\delta + 4.\ \varepsilon) - n\ .\ 2.3.\ldots.10.\ (\gamma\delta + \beta\varepsilon + \zeta)]\ \frac{a^{10}}{1.2\ 3\ldots\varrho.10}\ \&c.$$

Statt der nur **einſtweilen** zur Erleichterung der Rechnung unbeſtimmt angenommenen Coefficienten β, γ, δ, ε, ζ etc. ſetze man nun in dieſe letzte Gleichung ihre bekannten Werthe in Zahlen

$$\beta = \frac{1.1}{2.3},\ \gamma = \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5},\ \delta = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5\ 6.7},\ \varepsilon = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8\ 9}$$

$$\zeta = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7\ 9.9}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon\ \varrho}$$ u. ſ. w. worauf dann wird

$$+\frac{n^2}{2}a^2 = \frac{n^2}{2}a^2;\ 2) \frac{a^4}{1.2.3.4}[n^4 - 2.3.\ 4n^2\beta] = -\frac{a^4}{1.2.3.4}$$

$$[n^2 - 4n^2] = -\frac{n^2(n^2 - 2^2)}{2.\ \ 3.\ \ 4}.\ a^4;\ 3) + \frac{a^6}{1.\ 2.\ 3.4.\ 5.\ 6}$$

$$[n^6 - n^4.\ 4.5.6.\beta + n^2\ 3.4.5.6\ (\beta^2 + 2\gamma)] = +\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}.$$

$$[n^6 - n^4.\ 18 + 54n^2] = +\frac{n^2(n^2 - 2^2).\ (n^2 - 4^2)}{2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6}a^6;$$

$$4) - \frac{a^8}{1.\ 2.\ 3\ldots8}.[n^8 - n^6.\ 6.\ 7.\ 8.\ \beta + n_4 5.6.7.8.\ (6\beta^2 + 4\gamma) - n^2.\ 2.3\ldots8(\beta\gamma + \delta)] = -\frac{a^8}{1.2.3\ldots8}.[n^8 - 48n^6 + 554n^4 - 1400n^2] = -\frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)(n^2 - 6^2)}{2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5.\ \ 6.\ \ 7.\ \ 8}.\ a^8;$$

5)

$$5)+\frac{a^{\varepsilon}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon}[n^{\varepsilon}-n^{8}.8.9.\varepsilon\beta+n^{6}.7.8.9.\varepsilon(13\beta^{2}+6\gamma)$$

$$-n^{4}.4.5.6.7.8.9.\varepsilon(\beta^{3}+3\beta\gamma+\delta)+n^{2}.3.4.5\ldots\varepsilon(\gamma^{2}+2\beta\delta+2\varepsilon)]$$

$$=+\frac{a^{\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon}[n^{\varepsilon}-\varepsilon 0.n^{8}+2640\,n^{6}-26454\,n^{4}+71400\,n]$$

$$=+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})(n^{2}-8^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;\varepsilon}.a^{\varepsilon};$$

$$6)-\frac{a^{10}}{1.2.3\ldots9.\varepsilon.\varrho.10}[n^{10}-n^{\varepsilon}.\varepsilon.\varrho.10\beta+n^{8}.9.\varepsilon.\varrho.10(24\beta^{2}+8\gamma)$$

$$-n^{6}.7.8.9.\varepsilon.\varrho.10(18\beta^{3}+26\beta\gamma+6\delta)+n^{4}.5.6.7\ldots10.$$

$$(\beta^{4}+6\gamma^{2}+6\beta^{2}\gamma+10\beta\delta+4\varepsilon)-n^{2}.2.3\ldots\varrho.10(\gamma\delta+\beta\varepsilon+\zeta)]$$

$$=-\frac{a^{10}}{1.2.3\ldots\varrho.10}[n^{10}-164\,n^{\varepsilon}+9580\,n^{8}-1\varrho7194.$$

$$n^{6}+1982454\,n^{4}-n^{2}.2^{2}.4^{2}.6^{2}.8^{2}.\varepsilon^{2}]$$

$$=-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})(n^{2}-8^{2})(n^{2}-\varepsilon^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;\varepsilon.\;\varrho.\;10}a^{10}\text{etc.}$$

Mithin iſt

$$72)\ \text{querſin}\,n\alpha=\frac{n^{2}}{2}a^{2}-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})}{2.\;3.\;4}a^{4}+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}a^{6}$$

$$-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}a^{8}$$

$$+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})(n^{2}-8^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;\varepsilon}a^{\varepsilon}$$

$$-\frac{n.(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})\ldots\ldots(n^{2}-\varepsilon^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\ldots\ldots\varrho.\;10}a^{10}\ldots\ldots$$

$$+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})\ldots(n^{2}-(4s-4)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\ldots(4s-3)(4s-2)}a^{4s-2}$$

$$-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})\ldots(n^{2}-(4s-4)^{2})(n^{2}-(4s-2)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8\ldots(4s-3)(4s-2)(4s-1)\,4s}a^{4s}$$

$$+\frac{n^{2}(n^{2}-2)(n^{2}-4^{2})\ldots(n^{2}-(4s-2)^{2})(n^{2}-(4s)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\ldots(4s-1)\,4s\,(4s+1)(4s+2)}a^{4s+2}\,\&c.$$

73) Den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden.

Da coſin $n\alpha = 1 -$ querſin $n\alpha$, ſo iſt

$$\cos;n\alpha=1-\frac{n^{2}}{2}a^{2}+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})}{2.\;3.\;4}a^{4}-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}a^{6}$$

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 6.\ 7.\ 8}a^8$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}a^{s}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n^2-4^2)\ \ldots\ldots\ (n^2-\varepsilon^2)}{5.\ 6\ \ldots\ldots\ 9.\ 10}a^{10}\ \ldots$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ \ldots\ldots\ (n^2-(4s-4)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 4.\ 6.\ \ldots\ldots\ (4s-3)(4s-2)}a^{4s-2}$$

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ \ldots\ (n^2-(4s-4)^2)(n^2-(4s-2)^2)}{2.\ 2.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ (4s-3)(4s-2)(4s-1).\ 4s}a^{4s}$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-2)^2)(n^2-(4s)^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5.\ 6\ \ldots(4s-1)(4s-0)(4s+1)(4s+2)}a^{4s+2}\ \&c.$$

74) Dieſe nämliche nach einem eigenen Geſetze fortſchreitende Reihe den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden, ergiebt ſich, wenn man überall in die von Käſtnern in ſeinen AnfangsGründen der Analyſis endlicher Größen Seite 103 $\cos n\alpha$ Statt μ, Statt $\cos \alpha = b$ ſolchen $= c$ ſetzt und dann ſeinen Werth durch den Sinus von $\alpha = a$ ausdruckt, nämlich $c = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ ſetzt, und überall, wo c und deſſen Potenzen vorkommen, den Werth davon ſubſtituirt und Statt c^n ſetzt $(1 - a^2)^{\frac{n}{2}}$ und $(1 - a^2)^{\frac{n-2}{2}}$ Statt c^{n-2} &c. Zugleich ſind dann auch, um obige Gleichung zu erhalten, alle Sätze und Producte, welche in einerlei Potenz von a multiplicirt ſind, zu einander zu addiren. In der Käſtneriſchen Formel mache ich nur folgende kleine Veränderung, daß ich c Statt b und $\cos n\alpha$ Statt μ ſetze. Sie iſt alsdann folgende.

$$\cos: n\alpha = c^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}c^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}c^{n-4}a^4$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 6}c^{n-6}a^6 + \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-7)}{1.\ 2\ \ldots\ 8}c^{n-8}a^8$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-9)}{1.\ 2\ \ldots\ \varepsilon}c^{n-\varepsilon}a^{\varepsilon}+\frac{n(n-1)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 10}c^{n-10}a^{10}\ \ldots$$

$$-\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-4s+3)}{1.\ 2.\ \ldots\ (4s-2)}.\ c^{n-4s+2}a^{4s-2}$$

$$+\frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-4s+2)(n-4s+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ (4s-1)\ \ 4s}c^{n-4s}a^{4s}$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)(n-4s)(n-4s-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s)\ (4s+1)\ (4s+2)}c^{n-4s-2}a^{4s+2}\ \&c.$$

75) Nun iſt aber $c = (1-a^2)^{\frac{1}{2}}$, mithin $c^n = (1-a^2)^{\frac{n}{2}}$, $c^{n-2} = (1-a^2)^{\frac{n-2}{2}}$, $c^{n-4} = (1-a^2)^{\frac{n-4}{2}}$, $c^{n-6} = (1-a^2)^{\frac{n-6}{2}}$ u. ſ. w. Werden nun dieſe Werthe in die letzte Gleichung geſetzt, ſo wird die folgende daraus.

$$\cos n\alpha = (1-a^2)^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} a^2 (1-a^2)^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.\frac{(n-2)(n-3)}{3.\ 4} a^4 (1-a^2)^{\frac{n-4}{2}} - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6} a^6.$$
$$(1-a^2)^{\frac{n-6}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 8} a^8. (1-a^2)^{\frac{n-8}{2}}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon} a^{\varepsilon} (1-a^2)^{\frac{n-\varepsilon}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{1.\ 2.\ 3\ \ldots}.$$
$$\frac{(n-9)}{10} a^{10} (1-a^2)^{\frac{n-10}{2}} \ \&c. - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ \ldots\ (4s-2)} a^{4s-2}.$$
$$(1-a^2)^{\frac{n-4s+2}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+2)(n-4s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s-1)\ .\ 4s} a^{4s}.$$
$$(1-a^2)^{\frac{n-4s}{2}} - \frac{n(n-1)\ \ldots\ (n-4s)(n-4s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ (4s+1)(4s+2)}.\ a^{4s+2}$$
$$(1-a^2)^{\frac{n-4s-2}{2}} \ \&c.$$

Nun iſt aber nach dem Binomiſchen LehrSatz $(a-b)^m = a^m - m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}. a^{m-4} b^4$ &c. Aber hier iſt $a = 1$ und $b = a^2$ und m nimmt nach und nach die Werthe $= \frac{n}{2}, = \frac{n-2}{2}, = \frac{n-4}{2}, = \frac{n-6}{2}, = \frac{n-8}{2}, = \frac{n-\varepsilon}{2}, = \frac{n-10}{2}$ &c. an. Mithin iſt

$$(1-a^2)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} a^2 + \frac{n(n-2)}{2\ 4} a^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6} a^6$$
$$+ \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 4.\ 6.\ 8} a^8 + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \varepsilon} a^{\varepsilon} \mp$$

$$+\frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 10}a^{10}\ \&c.;\ -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2(1-a^2)^{n-2}$$

$$=-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 2}a^4-\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 2.\ 4}a^6$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2\ 2.\ 4.\ 6}.$$

$$\frac{(n-8)}{8}a^{\varepsilon}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ \ldots\ 10}a^{10}\ \&c.;+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{n(n-2)(n-3)}{3.\ 4}a^4(1-a^2)^{\frac{n-4}{2}}=+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 2.}a^6+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4.\ 2}.$$

$$\frac{(n-4)(n-6)}{2.\ 4.}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6}a^{\varepsilon}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}a^{10}\ \&c.;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6}a^6(1-a^2)^{\frac{n-6}{2}}=-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}.$$

$$\frac{\ldots(n-5)}{\ldots\ 6}a^6+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ \ldots\ 6.\ 2}a^8-\frac{n(n-1)\ldots}{1.\ 2\ \ldots}.$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-8)}{6.\ 2.\ 4}a^{\varepsilon}+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)}{1.\ 2\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4}.$$

$$\frac{(n-\varepsilon)}{6}a^{10}\ \&c.;+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8}a^8(1-a^2)^{\frac{n-8}{2}}=$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 2}a^{\varepsilon}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 2.\ 4}a^{10}\ \&c.;-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-9}{3\ \ldots\ \varepsilon}a^{\varepsilon}(1-a^2)^{\frac{n-\varepsilon}{2}}=-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots)n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon}a^{\varepsilon}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon.\ 2}a^{10}\ \&c.;+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{\ldots n-\varrho)}{\ldots\ 10}a^{10}(1-a^2)^{\frac{n-10}{2}}=+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varrho)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 10}a^{10}$$

&c. u. ſ. w.

Addirt man nun alles, was in einerlei Potenz von a multiplicirt iſt, zuſammen, ſo erhält man nach und nach

$$\cos n\alpha = 1 - a^2.\left[\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \frac{n}{2}\right] + a^4.\left[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 2} + \frac{n(n-2)}{2.\ 4}\Big] - a^6.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 2.\ 4}$$

$$+ \frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6}\Big] + a^8.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8} + \frac{n(n-1}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-5)(n-6)}{3\ \ldots\ 6.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\Big] - a^{\varepsilon}.$$

$$\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 9.\ \varepsilon} + \frac{n(n-1)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2\ \ldots\ 8.\ 2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$\frac{(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}$$

$$+ \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \varepsilon}\Big] + a^{10}.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 10}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2\ 3.\ \ldots\ 8.\ 2}.$$

$$\frac{(n-\varepsilon)}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4.\ 6}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10} + \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 10}\Big]\ \&c.$$

u. ſ. w.

Folglich $\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2}a^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}a^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^6$

$$+ \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ 7.\ 8}a^8$$

Nun iſt aber $c = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$ mithin $c^n = (1 - a^2)^{\frac{n}{2}}$, $c^{n-1} = (1 - a^2)^{\frac{n-1}{2}}$, $c^{n-3} = (1 - a^2)^{\frac{n-3}{2}}$, $c^{n-5} = (1 - a^2)^{\frac{n-5}{2}}$ u. ſ. w. Folglich wird, wenn dieſe Werthe in obige Gleichung geſetzt werden, die folgende daraus

$$\sin n\alpha = n a. (1-a^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n(n-1)}{1.}\frac{(n-3)}{2.\quad 3.} a^3 (1-a^2)^{\frac{n-3}{2}}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.}\frac{(n-2)}{2.}\frac{(n-3)}{3.}\frac{(n-4)}{4.\quad 5}. a^5 (1-a^2)^{\frac{n-5}{2}}$$
$$- \frac{n(n-1) \ldots (n-6)}{1.\ 2. \ldots 7} a^7 (1-a^2)^{\frac{n-7}{2}} + \frac{n(n-1) \ldots (n-8)}{1.\ 2 \ldots 9}$$
$$(1-a^2)^{\frac{n-9}{2}} - \frac{n(n-1) \ldots (n-\varepsilon)}{1.\ 2 \ldots \varrho} a^\varrho (1-a^2)^{\frac{n-\varrho}{2}} \text{ \&c.} \ldots$$
$$- \frac{n(n-1) \ldots (n-4s+2)}{1.\ 2. \ldots (4s-1)} a^{4s-1} (1-a^2)^{\frac{n-4s+1}{2}}$$
$$+ \frac{n(n-1) \ldots (n-4s)}{1.\ 2. \ldots (4s+1)} a^{4s+1} (1-a^2)^{\frac{n-4s-1}{2}} \text{ \&c.}$$

6ε) Nun iſt nach dem Binomiſchen Lehrſatz $(a-b)^m = a^m - m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1) m-2\ m-3}{1.\ 2.\ 3\quad 4} a^{m-4} b^4$ &c. Allein hier iſt $a = 1$ und $b = a^2$ und m nach und nach $= \frac{n-2}{2}, = \frac{n-3}{2}, = \frac{n-5}{2}, = \frac{n-7}{2}, = \frac{n-9}{2}, = \frac{n-\varrho}{2}$. &c. Mithin iſt $n a (1-a^2)^{\frac{n-1}{2}}$

$$= n a - \frac{n(n-1)}{1.\ 3} a^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{2.\quad 4} a^5 - \frac{n(n-1)(n+3)}{2\ .\ 4}.$$
$$\frac{n-5}{6} a^7 + \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8} a^9$$
$$- \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)(n-9).}{1\ .\ 2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ \varepsilon} a^\varrho \text{ \&c.};$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^3 (1-a^2)^{\frac{n-3}{2}} = - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\quad 3}. a^3$$

+

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\ 2\ \ 2\ \ 2}a^5-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}.\frac{(n-3)(n-5)}{2.\ \ 4}a^7$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}.\frac{(n-3)(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4.\ \ 6}a^9-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}.$$

$$\frac{(n-3)(n-5)(n-7)(n-9)}{2\ \ 4\ \ 6\ \ 8}a^\varrho\ \&c.;+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ 5}a^5$$

$$(1-a^2)^{\frac{n-5}{2}}=+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1\ 2\ \ldots\ 5}a^5-\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ 2\ \ldots\ 5}.\frac{n-5}{2}a^7$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ 2.\ \ldots\ 5}.\frac{(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4}a^9-\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ 2.\ \ldots\ 5}.$$

$$\frac{(n-5)(n-7)(n-9)}{2\ \ 4\ \ 6}a^\varrho\ \&c.;$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ 7}.\ a^7.(1-a^2)^{\frac{n-7}{2}}=$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ 7}a^7+\frac{n(n-1)\ ..(n-6)}{1\ 2\ \ ..\ 7}.\frac{n-7}{2}.a^9$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.\ 2\ \ldots\ldots.\ 7}\frac{(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4}a^\varrho\ \text{etc.};$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-8)}{1.\ 2\ \ 3\ \ldots.\ 9}a^9(1-a^2)^{\frac{n-9}{2}}$$

$$=+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ 9}a^9-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ 9}.$$

$$\frac{n-9}{2}a^\varrho\ \text{etc.};$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-\varrho)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots..\ \varrho}a^\varrho(1-a^2)^{\frac{n-\varrho}{2}}$$

$$=-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-\varrho)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots..\ \varrho}a^\varrho\ \text{etc.}$$

Addirt man nun alles, was in einerlei Potenz von a multiplicirt iſt, zuſammen, ſo erhält man nach und nach

$$\sin n\alpha=na-a^3.\left[\frac{n(n-1)}{1.\ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\right]+a^5.\left[\frac{n(n-1)(n-3)}{2.\ \ 4},\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ \ 3\ \ \ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}\right]$$

$$-a^7.\left[\frac{n.(n-1).(n-3)(n-5)}{1.\ 2.\ \ 4.\ \ 6}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ \ 3}.\frac{(n-3)(n-5)}{2.\ \ 4}\right.$$

+

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{(n-5)}{2}+\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.\ 2.\ \ldots\ 7}\Big]$$

$$+a^9\Big[\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-9)}{1.\ 2\ \ 4\ \ \varepsilon}+\frac{n(n-1)\ (n-2)}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\cdot$$
$$\frac{(n-3)(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4.\ \ 6}+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ 2.\ \ldots\ 5}\cdot\frac{(n-5)(n-7)}{2.\ \ 4}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.\ 2\ \ldots\ 7}\cdot\frac{(n-7)}{2}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-8)}{3\ \ 4\ \ldots\ 9}\Big].$$

$$-a^{\varrho}.\Big[\frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-9)}{2.\ \ 4\ \ldots\ \varepsilon}+\frac{n(n-7)\ (n-2)}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\cdot$$
$$\frac{(n-3)\ (n-5)\ (n-7)\ (n-9)}{2.\ \ 4.\ \ 6.\ \ 8}+\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ \ 2.\ \ldots\ 5}\cdot$$
$$\frac{(n-5)(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4.\ \ 6}+\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.\ \ 2\ \ldots\ 7}\cdot\frac{(n-7)(n-9)}{2.\ \ 4}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-8)(n-9)}{1.\ 2\ \ldots\ 9\ .\ 2}+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varepsilon)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \ldots\ \varrho}\Big]\ \text{etc.}$$

$$=na-\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5-\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot$$
$$\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{4.\ 5.\ \ 6.\ 7}a^7+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9$$
$$-\frac{n(n^2-1^2)\ (n^2-3^2)\ \ldots\ (n^2-9^2)}{1.\ \ 2.\ 3.\ \ 4.\ 5.\ \ldots\ \varepsilon.\ \varrho}a^{\varrho}\ldots$$
$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ 4.\ 5\ \ldots\ (4s-2)\ (4s-1)}a^{(4s-1)}$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-3)^2)(n^2-(4s-1)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ 4.\ 5\ \ldots(4s-2)(4s-1).\ 4s.\ (4s+1)}a^{4s+1}\ \&c.$$

6ϱ. Den Querſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden.

Bekannter Maßen fanden wir oben, daß

$$\text{querſin}\,\alpha=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha^4}{2.3.4}+\frac{\alpha^6}{2.3.4.5.6}-\frac{\alpha^8}{2.3.4.5.6.7.8}+\frac{\alpha^{\varepsilon}}{2.3\ldots\varepsilon}$$
$$-\frac{\alpha^{10}}{2.3\ldots.10}\ \&c.\quad(1')$$

ferner in (62) daß

$$\text{querſin}\,n\alpha=\frac{n^2.\alpha^2}{2}-\frac{n^4\alpha^4}{2.3.4}+\frac{n^6\alpha^6}{2.3\ldots6}-\frac{n^8\alpha^8}{2.3\ldots8}+\frac{n^{\varepsilon}\alpha^{\varepsilon}}{2.3\ldots\varepsilon}$$
$$-\frac{n^{10}\alpha^{10}}{2.3\ldots10}\ \&c.\quad(2')$$

Nun

Nun iſt aber $\alpha = a + \frac{1.1}{2.3}a^3 + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9$ $+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho}a^{\varrho}$ &c. Es wurden aber $\alpha = a + \beta a^3 + \gamma a^5 + \delta a^7 + \varepsilon a^9$ $+ \zeta a^{\varrho}$ &c. allgemein geſetzt, von welcher unendlichen Reihe ſich in (65) die 2te, 4te, 6te 8te, εte und 10te Potenz befindet. Setzt man nun dieſe dort befindlichen Werthe von $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{\varepsilon}, \alpha^{10}$, &c. hier in die Gleichung (2′) und bringt alles, was in einerlei Potenz multiplicirt iſt, in eine Columne unter einander, addirt dann ſolche verſchiedenen Coefficienten und Producte zuſammen, ſo erhält man den Coefficienten, welcher mit jedweder Potenz von a multiplicirt iſt.

		a^4	a^4	a^6	a^8	a^{ε}	a^{10} &c.
$+\frac{n^2}{2}\alpha^2 = -$	$\frac{n^2}{2}$.	$+\frac{n^2.2\beta}{2}$	$+\frac{n^2.2\gamma}{2}$ $+\frac{n^2\,\beta^2}{2}$	$+\frac{n^2.2\delta}{2}$ $+\frac{n^2\,2\beta\gamma}{2}$	$+\frac{n^2.2.\varepsilon}{2}$ $+\frac{n^2.2\beta\delta}{2}$ $+\frac{n^2.\gamma^2}{2}$	$+\frac{n^2.2.\zeta}{2}$ $+\frac{n^2.2\beta\varepsilon}{2}$ $+\frac{n^2.2\gamma\delta}{2}$	
$-\frac{n^4}{1.2.3.4}\alpha^4 =$		$-\frac{n^4}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\beta}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\beta^2}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4\delta}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.10\beta\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.4\beta^3}{1.2.3.4}$	$-\frac{n^4.4.\varepsilon}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4\,10\beta\delta}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\beta^2\gamma}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.6\gamma^2}{1.2.3.4}$ $-\frac{n^4.\beta^4}{1.2.3.4}$	
$-\frac{n^6}{1.2.3.4.5.6}\alpha^6 =$			$+\frac{n^6}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\beta}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\gamma}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6.13\beta^2}{1.2.3.4.5.6}$	$+\frac{n^6.6\delta}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6.26\beta\gamma}{1.2.3.4.5.6}$ $+\frac{n^6\,18\beta^3}{1.2.3.4.5.6}$	
$-\frac{n^8}{1.2.3...8}\alpha^8 =$				$-\frac{n^8}{1.2.3...8}$	$-\frac{n^8.8\beta}{1.2.3...8}$	$-\frac{n^8.8\gamma}{1.2.3...8}$ $-\frac{n^8.24\beta^2}{1.2.3...8}$	
$+\frac{n^{\varepsilon}}{1.2.3...\varepsilon}\alpha^{\varepsilon} =$					$+\frac{n^{\varepsilon}}{1.2.3...\varepsilon}$	$+\frac{n^{\varepsilon}.\varepsilon\beta}{1.2.3..\varepsilon}$	
$-\frac{n^{10}}{1.2.3...10}\alpha^{10} =$						$-\frac{n^{10}}{1.2.3...10}$	

querſin

$\frac{12}{2}\alpha^2 - \left[\frac{n^4 - 2.3.4\, n^2 \beta}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\right] a^4 + [n^6 - n^4.$

$3.4.5.6.(\beta^2 + 2\gamma)]\frac{a^6}{1.2.3...6} - [n^8 - n^6.$

$5.6.7.8\ (6\beta^2 + 4\gamma) - n^2.\ 2.3.4.5.6.7.8$

$\frac{}{.8} + [n^{\varepsilon} - n^8.\ 8.9.\varepsilon\beta + n^6.\ 7.8.9.\varepsilon(13\beta^2 + 6\gamma)$

$\varepsilon(\beta^3 + 3\beta\gamma + \delta) + n^2.\ 3.4.5...\varepsilon(\gamma^2 + 2\beta\delta$

$\frac{}{.\varepsilon} - [n^{10} - n^{\varepsilon}.\varepsilon.\varrho.10\beta + n^8.\ 9.\varepsilon.\varrho.10(24.\beta^2$

$7.8.9.\varepsilon\,\varrho.10\ (18\beta^3 + 26\beta\gamma + 6\delta) + n^4.$

$.10.\ (\beta^4 + 6\gamma^2 + 6\beta^2\gamma + 10\beta\delta + 4.\varepsilon)$

$10.\ (\gamma\delta + \beta\varepsilon + \zeta)]\ \frac{a^{10}}{1.2.3...\varrho.10}$ &c.

nur **einſtweilen** zur Erleichterung der Rechnung nommenen Coefficienten β, γ, δ, ε, ζ etc. ſetze letzte Gleichung ihre bekannten Werthe in Zahlen

$\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}$, $\delta = \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}$, $\varepsilon = \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}$

$\frac{5.7.7.9.9}{7.8.9.\varepsilon\,\varrho}$ u. ſ. w. worauf dann wird

$;2) \frac{a^4}{1.2.3.4}[n^4 - 2.3.4n^2\beta] = - \frac{a^4}{1.2.3.4}$

$= - \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{2.\ 3.\ 4}.\ a^4;\ 3) + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}$

$5.\beta + n^2\, 3.4.5.6(\beta^2 + 2\gamma)] = + \frac{a^6}{1.2.3.4.5.6}.$

$+ 54n^2] = + \frac{n^2(n^2 - 2^2).(n^2 - 4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\ a^6;$

$.[n^8 - n^6.6.7.8.\beta + n^4 5.6.7.8.(6\beta^2 + 4\gamma)$

$3\gamma + \delta)] = - \frac{a^8}{1.2.3...8}.[n^8 - 48n^6 + 554n^4$

$= - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)(n^2 - 6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}.\ a^8;$

5)

$$5)+\frac{a^{\varepsilon}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,\varepsilon}[n^{\varepsilon}-n^{8}.8.9.\varepsilon\beta+n^{6}.7.8.9.\varepsilon(13\beta^{2}+6\gamma)$$

$$-n^{4}.4.5.6.7.8.9\,\varepsilon(\beta^{3}+3\beta\gamma+\delta)+n^{2}.3.4.5\ldots\varepsilon(\gamma^{2}+2\beta\delta+2\,\varepsilon)]$$

$$=+\frac{a^{\varepsilon}}{1.2.3\ldots\varepsilon}[n^{\varepsilon}-\varepsilon o.n^{8}+2640\,n^{6}-26454n^{4}+71400n\,]$$

$$=+\frac{n^{2}\,(n^{2}-2^{2})}{2.\;3}\,\frac{(n^{2}-4^{2})}{4.\;5.}\,\frac{(n^{2}-6^{2})}{6.\;7.}\,\frac{(n^{2}-8^{2})}{8\;\;9.\;\;\varepsilon}.\,a^{\varepsilon};$$

$$6)-\frac{a^{10}}{1.2.3\ldots9.\varepsilon.\varrho.10}[n^{10}-n^{\varepsilon}.\varepsilon\,\varrho\,10\beta+n^{8}.9.\varepsilon.\varrho.10(24\beta^{2}+8\gamma)$$

$$-n^{6}.7.8.9.\varepsilon.\varrho.10\,(18\beta^{3}+26\beta\gamma+6\delta)+n^{4}.\,5.6.7\ldots10.$$

$$(\beta^{4}+6\gamma^{2}+6\beta^{2}\gamma+10\beta\delta+4.\varepsilon)-n^{2}.\,2.3\ldots\varrho.10\,.\gamma\delta+\beta\varepsilon+\zeta)]$$

$$=-\frac{a^{10}}{1.2.3\ldots\varrho\;10}.[n^{10}-164\,n^{\varepsilon}+9580\,n^{8}-1\varrho7194.$$

$$n^{6}\;+\;1982454\,n^{4}\;-\;n^{2}.\,2^{2}.\;4^{2}.\;6^{2}.\;8^{2}.\;\varepsilon^{2}]$$

$$=-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})(n^{2}-8^{2})(n^{2}-\varepsilon^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;\varepsilon.\;\varrho.\;10}a^{10}\text{etc.}$$

Mithin iſt

$$72)\;\text{querſin}\,n\alpha=\frac{n^{2}}{2}a^{2}-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})}{2.\;3.\;4}a^{4}+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}a^{6}$$

$$-\frac{n^{2}\,(n^{2}-2^{2})\,(n^{2}-4^{2})\,(n^{2}-6^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}a^{8}$$

$$+\frac{n^{2}\,(n^{2}-2^{2})\,(n^{2}-4^{2})\,(n^{2}-6^{2})\,(n^{2}-8^{2}}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;\varepsilon}a^{\varepsilon}$$

$$-\frac{n.\,(n^{2}-2^{2})\,(n^{2}-4^{2})\,\ldots\ldots(n^{2}-\varepsilon^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;\ldots\ldots\varrho.\;10}a^{10}\ldots\ldots$$

$$+\frac{n^{2}\,(n^{2}-2^{2})\,)n^{2}-4^{2})\ldots\;(n^{2}-(4s-4)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;(4s-3)\,(4s-2)}a^{4s-2}$$

$$-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})(n^{2}-6^{2})\ldots(n^{2}-(4s-4)^{2})(n^{2}-(4s-2)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8\;\ldots\;(4s-3)(4s-2)(4s-1)\;4s}a^{4s}$$

$$+\frac{n^{2}(n^{2}-2)(n^{2}-4^{2})\ldots(n^{2}-(4s-2)^{2})(n^{2}-(4s)^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;(4s-1)\;4s\;(4s+1)(4s+2)}a^{4s+2}\;\&c.$$

73) Den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus des Bogens α zu finden.

Da coſin $n\alpha=1-$ querſin $n\alpha$, ſo iſt

$$\cos;n\alpha=1-\frac{n^{2}}{2}a^{2}+\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})}{2.\;3.\;4}a^{4}-\frac{n^{2}(n^{2}-2^{2})(n^{2}-4^{2})}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}a^{6}$$

+

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 6.\ 7.\ 8}a^8$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}a^{\varepsilon}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}\cdot\frac{(n^2-4^2)\ldots\ldots(n^2-\varepsilon^2)}{5.\ 6\ldots\ldots 9.\ 10}a^{10}\ldots.$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots\ldots(n^2-(4s-4)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 4.\ 6.\ \ldots\ldots(4s-3)(4s-2)}a^{4s-2}$$

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots\ldots(n^2-(4s-4)^2)(n^2-(4s-2)^2)}{2.\ 2.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots(4s-3)(4s-2)(4s-1).\ 4s}a^{4s}$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots\ldots(n^2-(4s-2)^2)(n^2-(4s)^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5.\ 6\ldots(4s-1)(4s-0)(4s+1)(4s+2)}a^{4s+2}\ \&c.$$

74) Dieſe nämliche nach einem eigenen Geſetze fortſchreitende Reihe den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden, ergiebt ſich, wenn man überall in die von Käſtnern in ſeinen AnfangsGründen der Analyſis endlicher Größen Seite 103 $\cos n\alpha$ Statt μ, Statt $\cos\alpha = b$ ſolchen $= c$ ſetzt und dann ſeinen Werth durch den Sinus von $\alpha = a$ ausdruckt, nämlich $c = (1-a^2)^{\frac{1}{2}}$ ſetzt, und überall, wo c und deſſen Potenzen vorkommen, den Werth davon ſubſtituirt und Statt c^n ſetzt $(1-a^2)^{\frac{n}{2}}$ und $(1-a^2)^{\frac{n-2}{2}}$ Statt c^{n-2} &c. Zugleich ſind dann auch, um obige Gleichung zu erhalten, alle Sätze und Producte, welche in einerlei Potenz von a multiplicirt ſind, zu einander zu addiren. In der Käſtneriſchen Formel mache ich nur folgende kleine Veränderung, daß ich c Statt b und $\cos n\alpha$ Statt μ ſetze. Sie iſt alsdann folgende.

$$\cos : n\alpha = c^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}c^{n-2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}c^{n-4}a^4$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 6}c^{n-6}a^6+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-7)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ 8}c^{n-8}a^8$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-9)}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ \varepsilon}c^{n-\varepsilon}a^{\varepsilon}+\frac{n(n-1)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 10}c^{n-10}a^{10}\ldots\ldots$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ \ldots\ldots(4s-2)}.\ c^{n-4s+2}a^{4s-2}$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-4s+2)(n-4s+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ldots(4s-1)\ 4s}c^{n-4s}a^{4s}$$

$$-\frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)(n-4s)(n-4s-1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s)\ (4s+1)\ (4s+2)}c^{n-4s-2}a^{4s+2}\ \&c.$$

75) Nun iſt aber $c = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}}$, mithin $c^n = (1 - a^2)^{\frac{n}{2}}$, $c^{n-2} = (1 - a^2)^{\frac{n-2}{2}}$, $c^{n-4} = (1 - a^2)^{\frac{n-4}{2}}$, $c^{n-6} = (1 - a^2)^{\frac{n-6}{2}}$ u. ſ. w. Werden nun dieſe Werthe in die letzte Gleichung geſetzt, ſo wird die folgende daraus.

$$\cos n\alpha = (1 - a^2)^{\frac{n}{2}} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} a^2 (1-a^2)^{\frac{n-2}{2}} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} . \frac{(n-2)(n-3)}{3.\ 4} a^4 (1-a^2)^{\frac{n-4}{2}} - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6} a^6 . (1-a^2)^{\frac{n-6}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots .\ 8} a^8 . (1-a^2)^{\frac{n-8}{2}}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon} a^{\varepsilon} (1-a^2)^{\frac{n-\varepsilon}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{1.\ 2.\ 3\ \ldots} . \frac{(n-9)}{10} a^{10} (1-a^2)^{\frac{n-10}{2}} \ \&c. - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ \ldots\ (4s-2)} a^{4s-2} .$$

$$(1-a^2)^{\frac{n-4s+2}{2}} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+2)(n-4s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s-1)\ .\ 4s} a^{4s} . (1-a^2)^{\frac{n-4s}{2}} - \frac{n(n-1)\ \ldots .\ (n-4s)(n-4s+1)}{1.\ 2\ \ldots .\ (4s+1)(4s+2)} . a^{4s+2} (1-a^2)^{\frac{n-4s-2}{2}} \ \&c.$$

Nun iſt aber nach dem Binomiſchen LehrSatz $(a-b)^m = a^m - m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} . a^{m-4} b^4$ &c. Aber hier iſt $a = 1$ und $b = a^2$ und m nimmt nach und nach die Werthe $= \frac{n}{2}, = \frac{n-2}{2}, = \frac{n-4}{2}, = \frac{n-6}{2}, = \frac{n-8}{2}, = \frac{n-\varepsilon}{2}, = \frac{n-10}{2}$ &c. an. Mithin iſt

$$(1-a^2)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} a^2 + \frac{n(n-2)}{2\ 4} a^4 - \frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6} a^6 + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 4.\ 6.\ 8} a^8 + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \varepsilon} a^{\varepsilon} -$$

+

$$+\frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-8)}{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 10}a^{10}\ \&c.;\ -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2(1-a^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$=-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 2}a^4-\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 2.\ 4}a^6$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2\ 2.\ 4.\ 6}.$$

$$\frac{(n-8)}{8}a^8+\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)\ldots(n-8)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ \ldots\ 10}a^{10}\ \&c.;+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{n(n-2)(n-3)}{3.\ 4}a^4(1-a^2)^{\frac{n-4}{2}}=+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^4$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 2.}a^6+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4.\ 2}.$$

$$\frac{(n-4)(n-6)}{2.\ 4.}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6}a^8$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}a^{10}\ \&c.;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6}a^6(1-a^2)^{\frac{n-6}{2}}=-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}.$$

$$\frac{\ldots(n-5)}{\ldots\ 6}a^6+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)(n-6)}{1.\ 2.\ \ldots\ 6.\ 2}a^8-\frac{n(n-1)\ldots}{1.\ 2\ \ldots}.$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-8)}{6.\ 2.\ 4}a^8+\frac{n(n-1)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)}{1.\ 2\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4}.$$

$$\frac{(n-8)}{6}a^{10}\ \&c;\ +\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8}a^8(1-a^2)^{\frac{n-8}{2}}=$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8}a^8-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 2}a^8$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 2.\ 4}a^{10}\ \&c.;\ -\frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-9}{3\ \ldots\ 8}a^8(1-a^2)^{\frac{n-8}{2}}=-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots)n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8}a^8$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8.\ 2}a^{10}\ \&c.;\ +\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{\ldots n-9)}{\ldots\ 10}a^{10}(1-a^2)^{\frac{n-10}{2}}=+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 10}a^{10}$$

&c. u. ſ. w.

Addirt man nun alles, was in einerlei Potenz von a multiplicirt iſt, zuſammen, ſo erhält man nach und nach

$$\cos n\alpha = 1 - a^2.\Big[\frac{n(n-1)}{1.\ 2} + \frac{n}{2}\Big] + a^4.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 2} + \frac{n(n-2)}{2.\ 4}\Big] - a^6.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)}{1.\ 2.\ 2.\ 4}$$

$$+\frac{n(n-2)(n-4)}{2.\ 4.\ 6}\Big] + a^8.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-5)(n-6)}{3\ \ldots\ 6.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\Big] - a^{\varepsilon}.$$

$$\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)(n-9)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 9.\ \varepsilon} + \frac{n(n-1)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2\ \ldots\ 8.\ 2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{1.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}$$

$$+\frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ \varepsilon}\Big] + a^{10}.\Big[\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 10}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ \varepsilon.\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)(n-8)}{1.\ 2\ 3.\ \ldots\ 8.\ 2}.$$

$$\frac{(n-\varepsilon)}{4} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6.\ 2.\ 4.\ 6}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.$$

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10} + \frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6.\ \ldots\ 10}\Big]\ \&c.$$

u. ſ. w.

Folglich $\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2}a^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}a^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^6$

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ 7.\ 8}a^8$$

$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}\,a^{8}$$
$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-\varepsilon^2}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ \varrho\ 10}\,a^{10}\ \&c.$$

76) Den Quercoſinus des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden.

Da bekanntlich quercos $n\alpha = 1 - \sin n\alpha$ ſo iſt

$$\text{quercos } n\alpha = 1 - na + \frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7$$
$$-\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9$$
$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ \varepsilon.\ \varrho}a^{\varrho}\ \&c.$$

77) Da die unendlichen Reihen, wodurch die Tangente, Cotangente, Sekante, Coſekante aus ihrem Bogen zu finden ſind, nach keinem allgemeinen Geſetze ſich entwickeln laßen; ſondern blos wenn man ſie erſt durch die gegebenen Sinuße und Coſinuße und die dieſer ihren Werth ausdrückenden geſetzmäßig fortſchreitenden Reihen als gegeben und ſchon entwickelt betrachtet, können ſie in Brüche **nur**, deren Zähler und Nenner aus geſetzmäßig fortſchreitenden Reihen beſtehen, faßlich vorgeſtellt werden. Gleiche Umſtände treten daher auch beim Beſtimmen der 4 Ausdrücke, die Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus a des Bogens α zu finden. Wir drücken daher die tang $n\alpha$ aus durch $\sin n\alpha.\ \cos n\alpha^{-1}$, die cotang $n\alpha$ durch $\cos in\ n\alpha\ \sin n\alpha^{-1}$, die ſecant $n\alpha$ durch $\cos in\ n\alpha^{-1}$, die coſec $n\alpha$ durch $\sin n\alpha^{-1}$ weil dieſe trigonometriſche Größen als abgeleitete von den ihren Werth ausdrückenden eben angeführten Größen anzuſehen ſind.

Wollte man dennoch in die ohne Geſetz fortlaufenden Reihen zum Finden der Tangente, Cotangente, Sekante, Coſekante, aus ihrem Bogen $n\alpha$ Statt den Bogen α aus ſeinen Potenzen den in (65) ſtehenden Werth dafür ſetzen, ſo würde man wiederum nothwendiger Weiſe ohne Geſetz fortſchreitende Reihen, dieſe Größen aus dem Sinus a des Bogens α zu finden, erhalten. — Doch

wer

wer noch groß daran zweifelt, überzeuge ſich durch einen Verſuch ſelbſt davon. Ich meines Theils halte ihn für die Zeit verderbend.

78) Die Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante des Bogens $n\alpha$ aus dem Sinus des Bogens α zu finden.

Man ſuche rückſichtlich nach (68) den Sinus des Bogens $n\alpha$ aus des einfachen Bogens α Sinus a zu finden, und nach (73) den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus des einfachen Bogens α Sinus a zu finden. Dieſe zwei Formeln ſind

$$(1)\ \sin n\alpha = \frac{n}{1}a - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\,2.\,3}a^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}a^5 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}a^7 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\frac{(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{6.\,7.\,8.\,9}a^9 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ldots\varepsilon.\,\varrho}a^{\varrho}\ \&c.$$

$$(2)\ \cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2}a^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\,3.\,4}a^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}a^6 + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8}a^8 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}.\frac{(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{7.\,8.\,9.\,\varepsilon}a^{\varepsilon} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots}{2.\,3.\,4.\,5.\,6\ldots}.\frac{(n^2-\varepsilon^2)}{\varrho.\,10}a^{10}\ \&c.$$

Hierauf findet man ſehr leicht

(3) $\tan n\alpha = (\sin n\alpha).(\cos n\alpha)^{-1}$ (Siehe 1 und 2)

(4) $\cot n\alpha = (\cos n\alpha)(\sin n\alpha)^{-1}$ (Siehe 2 und 1)

(5) $\sec n\alpha = (\cos n\alpha)^{-1}$ (Siehe 2)

$\operatorname{cosec} n\alpha = (\sin n\alpha)^{-1}$ (Siehe 1)

79) Jezt werde nun n zu einem uneigentlichen Bruche, das iſt, wenn $n = \frac{u}{m}$ ſo ſei $u > m$; ſo werden aus alle den acht ſo weit gefundenen Gleichungen die folgenden:

$$1^\circ,\ \sin n\alpha = \sin\frac{u}{m}\alpha = \frac{u.\,a}{m} - \frac{u(u^2-1^2\,m^2)}{1.\,2.\,3}\left(\frac{a}{m}\right)^3$$

+

$$+\frac{u\,(u^2-1^2.\,m^2)\,(u^2-3^2.\,m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\left(\frac{a}{m}\right)^5$$

$$-\frac{u\,(u^2-1^2\,m^2)\,(u^2-3^2.\,m^2)\,(u^2-5^2.\,m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}\left(\frac{a}{m}\right)^7$$

$$+\frac{u\,(u^2-1^2.m^2)\,(u^2-3^2m^2)\,(u^2-5^2m^2).\,(u^2-7^2m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}\left(\frac{a}{m}\right)^9$$

$$-\frac{u\,(u^2-1^2m^2)\,(u^2-3^2.m^2)\ldots(u^2-9^2m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots.\,\varepsilon.\,\varrho}\left(\frac{a}{m}\right)^{\varrho}\ldots\ldots\ldots$$

$$-\frac{u(u^2-1^2.m^2)\,(u^2-3^2.m^2)\ldots(u^2-(4s-3)^2m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ldots(4s-2)\,(4s-1)}\left(\frac{a}{m}\right)^{4s-1}$$

$$+\frac{u(u^2-1^2.m^2)(u^2-3^2.m^2)\ldots(u^2-(4s-1)^2m^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ldots4s\,(4s+1)}\left(\frac{a}{m}\right)^{4s+1}\text{\&c.}$$

2°, querſin $n\alpha =$ querſin $\frac{u}{m}\alpha = \frac{u^2}{2}\left(\frac{a}{m}\right)^2-\frac{u^2(u^2-2^2m^2)}{2.\,3.\,4}\left(\frac{a}{m}\right)^4$

$$+\frac{u^2\,(u^2-2^2\,m^2)\,(u^2-4^2\,m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}\left(\frac{a}{m}\right)^6$$

$$-\frac{u^2\,(u^2-2^2.\,m^2)\,(u^2-4^2\,m^2)\,(u^2-6^2\,m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8}\left(\frac{a}{m}\right)^8$$

$$+\frac{u^2(u^2-2^2m^2)(u^2-4^2.m^2).\,(u^2-6^2m^2)(u^2-8^2m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,\varepsilon}\left(\frac{a}{m}\right)^{\varepsilon}$$

$$-\frac{u^2\,(u^2-2^2.m^2)(u^2-4^2m^2)\ldots\ldots(u^2-\varepsilon^2m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\ldots.\,\varepsilon.\,10}.\left(\frac{a}{m}\right)^{10}\text{\&c.}$$

3°) $\cos n\alpha = \cos\frac{u}{m}\alpha = 1-\frac{u^2}{2}\left(\frac{a}{m}\right)^2+\frac{u^2(u^2-2^2m^2)}{2.\,3.\,4}\left(\frac{a}{m}\right)^4$

$$-\frac{u^2(u^2-2^2m^2)(u^2-4^2m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}\left(\frac{a}{m}\right)^6+\frac{u^2.(u^2-2^2m^2)}{2.\,3.\,4}.$$

$$\frac{(u^2-4^2m^2)(u^2-6^2m^2)}{5.\,6.\,7.\,8},\left(\frac{a}{m}\right)^8-\frac{u^2(u^2-2^2m^2)(u^2-4^2m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}.$$

$$\frac{(u^2-6^2m^2)(u^2-8^2m^2)}{7.\,8.\,9.\,\varepsilon}.\left(\frac{a}{m}\right)^{\varepsilon}+\frac{u^2(u^2-2^2m^2)}{2.\,3.\,4}.$$

$$\frac{(u^2-4^2m^2)\ldots.\,(u^2-\varepsilon^2m^2)}{5.\,6\ldots\ldots\varrho.\,10}\left(\frac{a}{m}\right)^{10}-\ldots\ldots$$

$$-\frac{u^2(u^2-2^2m^2)(u^2-4^2m^2)\ldots.(u^2-(4s-4)^2m^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6\ldots.(4s-3)\,(4s-2)}\left(\frac{a}{m}\right)^{4s-2}$$

+

$$+\frac{n^2(u^2-2^2m^2)(u^2-4^2m^2)\ldots(u^2-(4s-2)^2m^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots(4s-1)\ 4s}\left(\frac{n}{m}\right)^{4s}\ \&c.$$

4°) $\text{quercos}\,\frac{u}{m}\,\alpha = 1 - \text{ſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha$ (Siehe 1°)

5°) $\text{tang}\,\frac{u}{m}\,\alpha = (\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha).\,(\cos\frac{u}{m}\,\alpha)^{-1}$ (Siehe 1° und 3°)

6°) $\text{cotang}\,\frac{u}{m}\,\alpha = (\cos\frac{u}{m}\,\alpha).\,(\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha)^{-1}$ (Siehe 3° und 1°)

7°) $\text{ſecante}\,\frac{u}{m}\,\alpha = (\cos\frac{u}{m}\,\alpha)^{-1}$ (Siehe 3°)

8°) $\text{coſec}\,\frac{u}{m}\,\alpha = (\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha)^{-1}$ (Siehe 1°)

79) Hat aber n den Werth eines **eigentlichen** Bruches angenommen, d. i. $n<1$ und folglich auch $u<m$, wenn $n=\frac{u}{m}$ iſt, ſo gehen folgende analytiſche Ausdrücke aus jenen in 78 hervor, worin + und − nicht abwechſeln.

1°) $$\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha = \frac{u.\ a}{1\ m} + \frac{u(m^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \frac{u(m^2.1^2-u^2)(m^2.3^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{a}{m}\right)^5 + \frac{u(m^2 1^2-u^2)(m^2 3^2-u^2)(m^2 5^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ 7}\left(\frac{a}{m}\right)^7$$
$$\ldots+\frac{u(m^2.1^2-u^2)(m^2.3^2-u^2)\ldots(m^2(2s-1)^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ 2s.\ (2s+1)}\left(\frac{a}{m}\right)^{2s+1}$$
$$+\frac{u(m^2 1^2-u^2)(m^2.3^2-u^2)\ldots(m^2(2s+1)^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ (2s+2)\ (2s+3)}\left(\frac{a}{m}\right)^{2s+3}\ \&c.$$

2°) $$\cos\frac{u}{m}\,\alpha = 1 - \text{querſin}\,\frac{u}{m}\,\alpha = 1 - \Big[\frac{u^2}{2}\left(\frac{a}{m}\right)^2$$
$$+\frac{u^2(m^2.2^2-u^2)}{2\ 3.\ 4}\left(\frac{a}{m}\right)^4 + \frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2\,4^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5.\ 6}\left(\frac{a}{m}\right)^6$$
$$+\frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2.4^2-u^2)(m^2.6^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}\left(\frac{a}{m}\right)^8$$
$$+\frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2.4^2-u^2)(m^2 6^2-u^2)(m^2.8^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}\left(\frac{a}{m}\right)^{10}$$
$$+\frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2.4^2-u^2)\ldots(m^2(2s-2)^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ (2s-1)\ 2s}\left(\frac{a}{m}\right)^{2s}\Big]\ \&c.$$

Die

Die übrigen ſechs trigonometriſchen Größen brauche ich nicht herzuſetzen, weil ſie alle leicht aus den beiden vorhergehenden dargeſtellt werden können und abzuleiten ſind.

***) 7Q) Aus dem Halbmeſſer = 1 oder dem Sinus totus, den Sinus, Querſinus, Quercoſinus, die Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante des u fachen mten Theils des Quadranten oder 4tel Umkreiſes zu finden.

Wenn a = 1 = dem Halbmeſſer, ſo iſt $\omega = \frac{1}{4}\pi = q$, ſetzt man dieſe Werthe in die beiden Gleichungen 1° und 2° in (7ε) ſo ergeben ſich daraus folgende

$$(1^\circ),\ \sin\frac{u}{m}q = \frac{u}{m} + \frac{u(1^2m^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{1}{m}\right)^5 + \frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)(5^2m^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{1}{m}\right)^7 + \frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)(5^2m^2-u^2)(7^2m^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\left(\frac{1}{m}\right)^9 + \frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)\ldots(9^2m^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots\varepsilon\cdot\varrho}\left(\frac{1}{m}\right)^\varrho \text{ etc.} + \frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)(5^2m^2-u^2)\ldots(m^2(2s-1)^2-u^2)}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\ldots 2s\cdot(2s+1)}\left(\frac{1}{m}\right)^{2s+1} \&c.$$

$$(2^\circ),\ \cos\frac{u}{m}q = 1 - \text{querſin}\,\frac{u}{m}q = 1 - \Big[\frac{u^2}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{u^2(m^2 2^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{m}\right)^4 + \frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2.4^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{m}\right)^6 + \frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2 4^2-u^2)(m^2 6^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{1}{m}\right)^8 + \frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2.4^2-u^2)(m^2 6^2-u^2)(m^2 8^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot\varepsilon}\left(\frac{1}{m}\right)^\varepsilon + \frac{u^2(m^2.2^2-u^2)(m^2 4^2-u^2)\ldots(m^2\varepsilon^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots\varrho\cdot 10}\left(\frac{1}{m}\right)^{10} \&c.\ldots + \frac{u^2(m^2 2^2-4^2)(4^2m^2-u^2)\ldots(m^2(2s-2)^2-u^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots(2s-1)\,2s}\left(\frac{1}{m}\right)^{2s} \&c\Big]$$

(3°).

(3°), $\text{quercos}\,\frac{u}{m}\,q = 1 - \text{ſin}\,\frac{u}{m}\,q$

(4°), $\text{tang}\,\frac{u}{m}\,q = \frac{\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,b}{\cos\frac{u}{m}\,q}$; (5°), $\text{cotang}\,\frac{u}{m}\,q = \frac{\cos\frac{u}{m}\,q}{\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,q}$;

(6°), $\text{ſecan}\,\frac{u}{m}\,q = \frac{1}{\cos\frac{u}{m}\,q}$; $\text{coſec}\,\frac{u}{m}\,q = \frac{1}{\text{ſin}\,\frac{u}{m}\,q}$;

80) Da der Coſinus eines Bogens beſtändig der Sinus des ErgänzungsBogens zum Quadranten, und der Sinus eines Bogens beſtändig der Coſinus des ErgänzungsBogens iſt, ſo iſt $\cos\,\frac{u}{m}\,q = \text{ſin}\,(1-\frac{u}{m})\,q = \text{ſin}\,(\frac{m-u}{m})\,q$; $\text{ſin}\,\frac{u}{m} = \cos\,(1-\frac{u}{m})\,q = \cos\,(\frac{m-u}{m})\,q$; $\text{tang}\,\frac{u}{m}\,q = \text{cotang}\,(\frac{m-u}{m})q$; $\text{cotang}\,\frac{u}{m}\,q = \text{tang}\,(\frac{m-u}{m})\,q$; $\text{ſec}\,\frac{u}{m} = \text{coſec}(\frac{m-u}{m})\,q$, $\text{coſec}\,\frac{u}{m}\,q = \text{ſec}\,(\frac{m-u}{m})q$

Es kann aber auch nach unſerer Annahme $n = \frac{m=u}{m}$ werden oder $\frac{u}{m}$ kann von $\frac{1}{m}$ bis zu $\frac{m-1}{m}$ wachſen, ſo daß es immer noch ein eigentlicher Bruch bleibt, und die Werthe, der zwiſchen dieſe beiden Brüche fallenden Brüche annehmen, folglich u in m — u übergehen, ohne daß die Bedingung, daß u kleiner ſein ſoll, als m, überſchritten wird.

Mithin findet man für einerlei Werth von $\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}\,q$, $\cos\frac{m-u}{m}\,q$, $\text{querſin}\,\frac{m-u}{m}\,q$, $\text{quercos}\,\frac{m-u}{m}\,q$, $\text{ſec}\,\frac{m-u}{m}\,q$, $\text{coſec}\,\frac{m-u}{m}\,q$ zwei verſchiedene Ausdrücke oder Formeln, und von $\text{tang}\,\frac{m-u}{m}\,q$ und $\text{cotang}\,\frac{m-u}{m}\,q$ vier verſchiedene Formeln, wenn

wenn man in die letztern Formeln den ſin $\frac{u}{m}q$, cos $\frac{u}{m}q$, &c. aus dem Halbmeßer zu finden, $\frac{m-u}{m}$ Statt $\frac{u}{m}$ ſetzt.

81) Dann iſt auch

$$\left.\begin{matrix}\text{tang}\,\frac{u}{m}q\\ \text{cotang}\left(\frac{m-u}{m}\right)q\end{matrix}\right\}=\frac{\text{ſin}\,\frac{u}{m}q}{\cos\frac{u}{m}q}=\frac{\cos\frac{m-u}{m}q}{\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}q}=\frac{\text{ſin}\,\frac{u}{m}q}{\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}q}=\frac{\cos\frac{m-u}{m}q}{\cos\frac{u}{m}q}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{cotang}\,\frac{u}{m}q\\ \text{cotang}\,\frac{m-u}{m}q\end{matrix}\right\}=\frac{\cos\frac{u}{m}q}{\text{ſin}\,\frac{u}{m}q}=\frac{\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}q}{\cos\frac{m-u}{m}q}=\frac{\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}q}{\text{ſin}\,\frac{u}{m}q}=\frac{\cos\frac{u}{m}q}{\cos\frac{m-u}{m}q}$$

$$\text{ſecante}\,\frac{u}{m}q=\text{coſec}\,\frac{m-u}{m}q=\left(\text{coſin}\,\frac{u}{m}q\right)^{-1}=\left(\text{ſin}\,\frac{m-u}{m}q\right)^{-1}$$

$$\text{coſec}\,\frac{u}{m}q=\text{ſec}\,\frac{m-u}{m}q=\left(\text{ſin}\,\frac{u}{m}q\right)^{-1}=\left(\text{coſin}\,\frac{m-u}{m}q\right)^{-1}$$

$$\text{quercos}\,\frac{m-u}{m}q=\text{querſin}\,\frac{u}{m}q$$

$$\left.\begin{matrix}\text{ſin}\,\frac{u}{m}q\\ \\ \text{coſin}\,\frac{m-u}{m}q\end{matrix}\right\}$$

$$\text{ſin}\,\frac{u}{m}q=\frac{u}{m}+\frac{u(1^2m^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.}\left(\frac{1}{m}\right)^3+\frac{u(1^2m^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.}\cdot\frac{(3^2m^2-u^2)}{4.\ 5}\left(\frac{1}{m}\right)^5+\frac{u(1^2.m^2-u^2)(3^2m^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{(5^2m^2-u^2)}{6.\ 7}\left(\frac{1}{m}\right)^7+\frac{u(1^2m^2-u^2)(3^2.m^2-u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\cdot\frac{(5^2m^2-u^2)}{6.\ 7}\left(\frac{1}{m}\right)^9\ \&c.$$

$$\text{coſin}\,\frac{m-u}{m}q=1-\frac{(m-u)^2}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2-\frac{(m-u)^2(2^2m^2-(m-u)^2}{2.\ 3.\ 4}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^4-\frac{(m-u)^2(2^2.m^2-(m-u)^2)}{2.\ 3.\ 4}\cdot\frac{(4^2m^2-(m-u)^2)}{5.\ 6}\left(\frac{1}{m}\right)^6-\frac{(m-u)^2(2^2.m^2-(m-u)^2)}{2\ 3.\ 4}\cdot\frac{(4^2m^2-(m-u)^2)(6^2m^2-(m-u)^2)}{5.\ 6.\ 7.\ 8}\left(\frac{1}{m}\right)^8\ \&c.$$

cos

$$\cos\frac{u}{m}q = 1 - \frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{m^2} - \frac{u^2(2^2m^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4}\left(\frac{1}{m}\right)^4 - \frac{u^2(2^2m^2.-u^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(4^2m^2-u^2)}{5.\ 6}\left(\frac{1}{m}\right)^6 - \frac{u^2(2^2m^2-u^2)(4^2m^2-u^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5.\ 6}.$$

$$\frac{(6^2m^2-u^2)}{7.\ 8}\left(\frac{1}{m}\right)^8 \&c.$$

$$\sin\frac{m-u}{m}q = \frac{m-u}{m} + \frac{(m-u)(m^2 1^2-(m-u)^2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \frac{(m-u)}{1}.$$

$$\frac{(m^2.1^2-(m-u)^2)(m^2.3^2-(m-u)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}\left(\frac{1}{m}\right)^5 + \frac{(m-u)}{1}.$$

$$\frac{(m^2 1^2-(m-u)^2)(m^2.3^2-(m-u)^2)(m^2 5^2-(m-u)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^7 \&c.$$

Beim Berechnen der Sinus und CoſinusTafeln kann die Berechnung nach der einen Formel, der Berechnung nach der andern Formel wechſelſeitig zur Probe dienen. Wie leicht und genau iſt nicht die Berechnung dieſer Tafeln nach dieſen Formeln gegen jene zeither bekannte, mit dem Ausziehen von Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln &c.; und jene Linien aus ihren Bogen zu finden! wie mühſeelig die alte BerechnungsWeiſſe !!

82) Aus dem Halbmeſſer = 1, die Seite jedes innerhalb eines Cirkels beſchriebenen m ecks zu finden.

Es ſei die ganze Perepherie des Cirkels = π folglich $\pi = 4q$ gleich dem vierfachen Quadranten, mithin $\sin\frac{u}{m}q = \sin\frac{u.\pi}{4.m}$. Es iſt aber die Seite jedes ordentlichen Vielecks von m gleichen Seiten gleich dem doppelten Sinus von $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{m}$; das iſt die chorda $\frac{1}{m}\pi = 2.\ \sin\frac{1}{2}.\frac{\pi}{m}$. Nun ſetze man $\frac{1}{2}\ \frac{\pi}{m} = \frac{u.q}{4.m}$, ſo iſt $\frac{u}{m} = \frac{2}{m}$ und $u = 2$. Mithin die chorda $\frac{1}{m}\pi = 2.\ \sin\frac{\pi}{2.m} = 2\sin\frac{2.q}{m}$. Es iſt aber

ſin

$$\sin\frac{2}{m}q = \frac{2}{m} + \frac{2.(m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3}\,\frac{1}{m^3} + \frac{2.(1^2m^2-2^2)(m^23^2-2^2)}{1\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{1}{m}\right)^5$$

$$+ \frac{2(1^2m^2-2^2)(3^2.m^2-2^2)(5^2m^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{1}{m}\right)^7 + \frac{2.}{1}.$$

$$\frac{(1^2m^2-2^2)(3^2m^2-2^2)(5^2m^2-2^2)(7^2m^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{1}{m}\right)^9$$

$$+ \frac{2.(1^2.m^2-2^2)(3^2.m^2-2^2)\dots(9^2.m^2-2^2)}{1\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \dots\ \varepsilon.\ \varrho}\left(\frac{1}{m}\right)^{\varrho}\dots.$$

$$+ \frac{2.(1^2m^2-2^2)(3^2.m^2-2^2)\dots(m^2(2s-1)^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dots(2s)(2s+1)}\left(\frac{1}{m}\right)^{2s+1}$$

&c. alſo

$$x = \text{chord}\frac{\pi}{m} = 4\Big[\frac{1}{m} + \frac{(1^2m^2-2^2)}{2.\ 3.}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \frac{(1^2.m^2-2^2)}{2.\ 3}.$$

$$\frac{(3^2.m^2-2^2)}{4.\ 5}\left(\frac{1}{m}\right)^5 + \frac{(1^2.m^2-2^2)(3^2m^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

$$\frac{(5^2m^2-2^2)}{6.\ 7}\left(\frac{1}{m}\right)^7 + \frac{(1^2.m^2-2^2)(3^2m^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}.$$

$$\frac{(5^2m^2-2^2)(7^2m^2-2^2)}{6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{1}{m}\right)^9 + \frac{(1^2m^2-2^2)}{2.\ 3}.$$

$$\frac{(3^2m^2-2^2)\dots(9^2m^2-2^2)}{4.\ 5\ \dots\ \varepsilon.\ \varrho}\left(\frac{1}{m}\right)^{\varrho}\dots + \frac{(m^2.1^2-2^2)}{2.\ 3.}.$$

$$\frac{(m^2.3^2-2^2)\dots(m^2(2s-1)^2-2^2)}{4.\ 5\ \dots\ 2s.\ (2s+1)}\left(\frac{1}{m}\right)^{2s+1}\ \&c.\Big]$$

83) Die Seiten des regulären 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ε, ϱ, 10ecks in einem und demſelben Cirkel beſchrieben zu finden.

Man ſetze nur nach und nach $m = 1, = 2, = 3, = 4, = 5, = 6, = 7, = 8, = 9, = \varepsilon, \varrho, 10$, in der zuletzt erhaltenen Gleichung, ſo erhält man die Seite eines jeden dieſer Vielecke.

1) Die Seite des 1ſten Eckes iſt $= 4.\Big[\frac{1}{1} + \frac{1^2-2^2}{2.\ 3.}$

$$+ \frac{(1^2-2^2)(1^2.3^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{(1^2-2^2)(1^2.3^2-2^2)(1^2.5^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.\frac{1}{1}$$

$$+ \frac{(1^2.1^2-2^2)(1^2.3^2-2^2)(1^2.5^2-2^2)(1^2.7^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9} + \frac{(1^21^2-2^2)}{2.\ 3}.$$

$(1^2$

$$\frac{(1^2.3^2-2^2)\ldots(1^2.9^2-2^2)}{4\cdot\;5\;\ldots\;8\cdot\;9}\text{ etc. }\Big] = 4.\Big[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{14}-\frac{5}{88}-\frac{7}{194}-\frac{19}{714}-\frac{29}{1228}-\frac{299}{1228.14}\;\&c.\Big] = 4\,(1-1) = 0.$$

Das iſt: die Seite des Einecks iſt und bleibt der mathematiſche Punct, und auch kein FlächenInhalt findet hier Statt, denn kein Punct hat eine Fläche.

2°) Die Seite des 2ecks iſt $= 4.\Big[\frac{1}{2}+\frac{2^2-2^2}{2.\;3}\,\frac{1}{2^3}$

$$+\frac{(2^2-2^2)(2^2.3^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5}\,\frac{1}{2^5}+\frac{2^2.1^2-2^2)(2^2.3^2-2^2)(2^2.5^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}\,\frac{1}{2^7}$$

$$+\frac{(2^2.1^2-2^2).(2^2.3^2-2^2)(2^2.5^2-2^2)(2^2.7^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9}\,\frac{1}{2^9}\;\&c.\Big]$$

$= 4.\frac{1}{2} = 2.$ Denn $\frac{1^2.2^2-2^2}{2.\;3} = 0$ und dieſer Factor kömmt, vom 2ten Glied an, in jedem Gliede der ganzen unendlichen Reihe vor, mithin ſind vom 2ten an, das erſte nicht mit inbegriffen, alle übrigen Glieder = 0 und die Seite des Zweiecks iſt gleich $4.\frac{1}{2}$. Das iſt: gleich dem doppelten Halbmeſſer oder ſie iſt dem Durchmeſſer ſelbſt gleich. Folglich fallen die beiden Seiten des Zweiecks in einander, ſie decken einander völlig, und auch hier für das Zweieck findet keiu FlächenInhalt Statt. Denn eine Linie ſoll auch ohne alle Ausdehnung als etwas urſprünglich Gewiſſes, Unabzuleitendes, Abſolutes gedacht werden.

3°) Die Seite des Dreiecks iſt $= 4.\Big[\frac{1}{3}+\frac{1^2.3^2-2^2}{2.\;3}.\frac{1}{3^3}$

$$+\frac{(1^2.3^2-2^2)(3^2.3^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.}\,\frac{1}{3^5}+\frac{(1^2.3^2-2^2)(3^2.3^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.}.$$

$$\frac{(3^2.5^2-2^2)}{6.\;7}.\frac{1}{3^7}+\frac{(1^2.3^2-2^2)(3^2.3^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)}{2.\;3\;4\;5.\;6.\;7}.$$

$$\frac{(3^2.7^2-2^2)}{8.\;9.}.\frac{1}{3^9}+\frac{(1^2.3^2-2^2)(3^2.3^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.}$$

$$\frac{(3^2.7^2-2^2)(3^2.9^2-2^2)}{8.\;9.\;8.\;9}.\frac{1}{3^9}\;\&c.\Big] = \sqrt{3}$$

Erſt drei Seiten oder Linien können eine Fläche bilden (einſchließen.) Das Dreieck, Viereck, das Alleck (Kreis) und die Ellipſe ſind die vier Elementar-Flächen.

Dieſe ſich hier aus dieſen drei Sätzen ergebenden Reſultate ſind zu merkwürdig; ſie geben eine deutliche, ja die deutlichſte Erklärung, warum ein Punkt, ohne alle Ausdehnung, als etwas ſchlechthin Abſolutes, eine Linie ohne alle Ausdehnung in die Breite und Dicke, als das zweite ſchlechthin Abſolute, und ein Dreieck als erſte anſchauliche Fläche als das 3te ſchlechthin Abſolute in der Geometrie begriffen und gedacht werden müſſen.

4°) Die Seite des Vierecks iſt

$$= 1 + \frac{(2^2-1)}{2.\,3}.\frac{1}{2^2} + \frac{(2^2-1)}{2.\,3}.\frac{(3^2.2^2-1)}{4.\,5}.\frac{1}{2^4} + \frac{(2^2.1^2-1)(2^2.3^2-1)(2^2.5^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}.\frac{1}{2^6}$$

$$+ \frac{(1^2.2^2-1)(3^2.2^2-1)(5^2.2^2-1)(7^2.2^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}.\frac{1}{2^8} + \frac{(1^2.2^2-1)}{2.\,3}.\frac{(3^2.2^2-1)(5^2.2^2-1)(7^2.2^2-1)(9^2.2^2-1)}{4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,\varepsilon.\,\varrho}.\frac{1}{2^{\varepsilon}} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(1^2.2^2-1)(3^2.2^2-1)\ldots(2^2.(2r-1)^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5\ \ 2r\,(2r+1)}.\frac{1}{2^{2r}}\ \&c. = \sqrt{2}$$

Die Seite des Fünfecks iſt

$$= 4.\Big[\frac{1}{5} + \frac{(1^2.5^2-2^2)}{2.\,3}.\frac{1}{5^3} + \frac{(1^2.5^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)}{2.\,3.\,4.\,5}.\frac{1}{5^5} + \frac{(1^2.5^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)}{2.\,3.\,4.\,5}.\frac{(5^2.5^2-2^2)}{6.\,7}.\frac{1}{5^7}$$

$$+ \frac{(1^2.5^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)(5^2.5^2-2^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}.\frac{(7^2.5^2-2^2)}{8.\,9}.\frac{1}{5^9} + \frac{1^2.5^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)\ldots(9^2.5^2-2^2)}{2.\,3.\,4.\,5\ \ldots\ \varepsilon.\,\varrho}.\frac{1}{5^{\varrho}}$$

$$+ \frac{(1^2.5^2-2^2)(3^2.5^2-2^2)\ldots(\varrho^2.5^2-2^2)}{2.\,3.\,4.\,5\ \ldots\ 10.\,11}.\frac{1}{5^{11}} \ldots \frac{(1^2.5^2-2^2)}{2.\,3}.\frac{(3^2.5^2-2^2)\ldots.(5^2(2s-1)^2-2^2)}{4.\,5\ \ldots\ 2s\,(2s+1)}\frac{1}{5^{2s+1}}\ \&c.\Big] = \tfrac{1}{2}\,(\varepsilon - 2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$$

6°) Die Seite des Sechsecks iſt

$$= 2.\Big[\frac{1}{3} + \frac{(1^2.3^2-1)}{2.\,3}\frac{1}{3^5} + \frac{(1^2.3^2-1)(3^2.3^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5}\frac{1}{3^5} + \frac{(1^2.3^2-1)(3^2.3^2-1)(3^2.5^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6}.\frac{1}{3^7}$$

$$+ \frac{(1^2.3^2-1)(3^2.3^2-1)(3^2.5^2-1)(3^2.7^2-1)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}\frac{1}{3^9} +$$

$$+\frac{(1^2.3^2-1)(3^2.3^2-1)(3^2.5^2-1)(3^2.7^2-1)(3^2.9^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon,\ \varrho}\ \frac{1}{3^{\varrho}}$$

$$\ldots+\frac{(1^2.3^2-1)(3^2.3^2-1)\ldots(3^2(2s-1)^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots(2s)\ (2s+1).3^{2s+1}}\ \&c. = 1$$

7°) Die Seite des Siebenecks iſt $= 4.\left[\frac{1}{7}+\frac{(7^2.1^2-2^2)}{2.\ 3}\ \frac{1}{7^3}\right.$

$$+\frac{(7^2.1^2-2^2)(7^2.3^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\ \frac{1}{7^5}+\frac{(7^2.1^2-2)(7^2.3^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}.$$

$$\frac{(7^2.5^2-2^2)}{6.\ 7.}\ \frac{1}{7^7}+\frac{(7^2.1^2-2^2)(7^2.3^2-2^2)(7^2.5^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.$$

$$\frac{(7^2.7^2-2^2)}{8.\ 9.\ 7^9}+\frac{(7^2.1^2-2^2)(7^2.3^2-2^2)\ldots(7^2.9^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5\ldots\ \varepsilon.\ \varrho}\ \frac{1}{7^{\varrho}}\&c.$$

$$\left.+\frac{(7^2.1^2-2^2)(7^2.3^2-2^2)\ldots(7^2(2s-1)^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ (2s)\ (2s+1)}\ \frac{1}{7^{2s+1}}\&c.\right].$$

8°) Die Seite des Achtecks iſt $= 2.\left[\frac{1}{4}+\frac{(1^2.4^2-1)}{2.\ 3}\ \frac{1}{4^3}\right.$

$$+\frac{(1^2.4^2-1.)(3^2.4^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}\ \frac{1}{4^5}+\frac{(1^2.4^2-1)(3^2.4^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

$$\frac{(5^2.4^2-1.)}{6.\ 7}.\frac{1}{4^7}+\frac{(1^2.4^2-1)(3^2.4^2-1)(5^2.4^2-1)(7^2.4^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\ \frac{1}{4^9}$$

$$+\frac{(1^2.4^2-1)(3^2.4^2-1)\ldots(9^2.4^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots\ \varepsilon.\ \varrho}.\frac{1}{4^{\varrho}}\ldots+\frac{(1^2.4^2-1)}{2.\ 3}.$$

$$\left.\frac{(3^2.4^2-1^2)\ldots(4^2(2s-1)^2-1)}{4.\ 5\ \ldots\ 2s.\ (2s+1)}.\frac{1}{4^{2s+1}}\&c\right]=(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

9°) Die Seite des Neunecks $= 4.\left[\frac{1}{9}+\frac{(9^2.1^2-2^2)}{2.\ 3}\ \frac{1}{9^3}\right.$

$$+\frac{(9^2.1^2-2^2)(9^2.3^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\ \frac{1}{9^5}+\frac{(9^2.1^2-2^2)(9^2.3^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

$$\frac{(9^2.5^2-2^2)}{6.\ 7}\ \frac{1}{9^7}+\frac{(9^2.1^2-2^2)(9^2.3^2-2^2)(9^2.5^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.$$

$$\frac{(9^2.7^2-2^2)}{8.\ 9}\ \frac{1}{9^9}+\frac{(1^2.9^2-2^2)(3^2.9^2-2^2)\ldots(9^2.9^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4\ 5\ \ldots\ \varepsilon.\ \varrho}\ \frac{1}{9^{\varrho}}$$

$$\left.\ldots+\frac{(1^2.9^2-2^2)(9^2.3^2-2^2)\ldots(9^2.(2s-1)^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ 2s\ (2s+1)}\ \frac{1}{9^{2s+1}}\&c\right]$$

ε°) Die Seite des εecks $= 2\left[\frac{1}{5}+\frac{(5^2.1^2-1)}{2.\ 3}.\frac{1}{5^3}+\frac{(5^2.1^2-1)}{2.\ 3}.\right.$

$$\frac{(5^2.3^2-1)}{4.\ 5}\ \frac{1}{5^5}+\frac{(5^2.1^2-1)(5^2.3^2-1)(5^2.5^2-1)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\ \frac{1}{5^7}+$$

$$+\frac{(5^2.1^2-1)(5^2.3^2-1)(5^2.5^2-1)(5^2.7^2-1)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9}\,\frac{1}{5^9}+\frac{(5^2.1^2-1)}{2.\;3}\,.$$

$$\frac{(5^2.3^2-1)\;\ldots\;(5^2.9^2-1)}{4.\;5\;\ldots\;\varepsilon.\;\wp}\,\frac{1}{5^{\wp}}\;\&c+\frac{(5^2.1^2-1)(5^2.3^2-1)\ldots}{2.\;3.\;4.\;5\;\ldots}\,.$$

$$\frac{(5^2.(2s-1)^2-1)}{2s\,(2s+1)}\,\frac{1}{5^{2s+1}}\;\&c.\Big]=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

℘°) Die Seite des ℘ecks $=4.\Big[\frac{1}{\wp}+\frac{(\wp^2.\,1^2-2^2)}{2.\;3}\,\frac{1}{\wp^3}$

$$+\frac{(\wp^2.1^2-2^2)(\wp^2.3^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5}\,\frac{1}{\wp^5}+\frac{(\wp^2.1^2-2^2)(\wp^2.3^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5}\,.$$

$$\frac{(\wp^2.5^2-2^2)}{6.\;7}\,\frac{1}{\wp^7}+\frac{(\wp^2.1^2-2^2)(\wp^2.3^2-2^2)(\wp^2.5^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}\,.$$

$$\frac{(\wp^2.7^2-2^2)}{8.\;9}\,\frac{1}{\wp^9}+\frac{(\wp^2.1^2-2^2)(\wp^2.3^2-2^2)\ldots(\wp^2.9^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5\;\ldots\;\varepsilon.\;\wp}\,\frac{1}{\wp^{\wp}}$$

$$+\frac{(\wp^2.1^2-2^2)(\wp^2.3^2-2^2)\ldots(\wp^2(2s-1)^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5\;\ldots\;2s\,(2s+1)}\,\frac{1}{\wp^{4s+1}}\;\&c.\Big]$$

10°) Die Seite des 10ecks iſt $=2.\Big[\frac{1}{6}+\frac{(6^2.\,1^2-1)}{2.\;3}\,\frac{1}{6^3}$

$$+\frac{(6^2.1^2-1)(6^2.3^2-1)}{2.\;3.\;4.\;5}\,\frac{1}{6^5}+\frac{(6^2.1^2-1)(6^2.3^2-1)(6^2.5^2-1)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}\,.$$

$$\frac{1}{6^7}+\frac{(6^2.1^2-1)(6^2.3^2-1)(6^2.5^2-1)(6^2.7^2-1)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9}\,\frac{1}{6^9}$$

$$+\frac{(6^2.1^2-1)(6^2.3^2-1)(6^2.5^2-1)\ldots(6^2.9^2-1)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7\;\ldots\;\varepsilon.\;\wp}\,\frac{1}{6^{\wp}}+\frac{(6^2.1^2-1)}{2.\;3}\,.$$

$$\frac{(6^2.3^2-1)\ldots(6^2(2s-1)^2-1)}{4.\;5\;\ldots\;2s\,(2s+1)}\,\frac{1}{6^{2s+1}}\;\&c\Big]=(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$$

84) Aus der gegebenen Seite = x eines Vielecks von m Seiten den Halbmeſſer zu finden.

Es ſei $x=\text{chorda}\,\frac{1}{m}\pi$ nun iſt $\pi=4q$ alſo $x=\text{chorda}\,\frac{4}{m}q$ $=2\,\text{ſin}\,\frac{2}{m}\,q$ Setzt man nun $\text{ſin}\,\frac{2}{m}\,q=\text{ſin}\,\alpha$, ſo iſt $\text{ſin}\,q$ $=\text{ſin}\,\frac{m}{2}\,\alpha$; denn $\frac{2}{m}\,q=\alpha$ ſo iſt $q=\frac{m\alpha}{2}$ Allein es iſt nun $\text{ſin}\,\alpha=a$ $=\frac{1}{2}\,x=\frac{1}{2}\,\text{chorda}\,\frac{1}{m}\pi$ folglich iſt, wenn man $\frac{m}{2}=n$ in unſere GrundGleichungen ſetzt.

$$r = \sin q = \sin\frac{m}{2}\alpha = m\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{m(m^2-2^2)}{1.\;2.\;3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \frac{m(m^2-2^2)}{1.\;2\;\;3}.$$

$$\frac{(m^2-6^2)}{4.\;\;5}\left(\frac{x}{4}\right)^5 - \frac{m(m^2-2^2)(m^2-6^2)(m^2-\varepsilon^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}\left(\frac{x}{4}\right)^7$$

$$+\frac{m(m^2-2^2)(m^2-6^2)(m^2-\varepsilon^2)(m^2-12^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9}\left(\frac{x}{4}\right)^9 - \frac{m(m^2-2^2)}{2.\;3.\;4}.$$

$$\frac{(m_2-6^2)\ldots(m^2-16^2)}{5.\;6\ldots\varepsilon.\;\varrho}.\left(\frac{x}{4}\right)^\varrho \ldots - \frac{m(m^2-2^2)(m^2-6^2)\ldots}{1.\;2.\;3.\;4.\;5\ldots}.$$

$$\frac{(m^2-2^2.(4s-3)^2)}{(4s-2)\;(4s-1)}.\left(\frac{x}{4}\right)^{4s-1} + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-6^2)\ldots\ldots}{1.\;2.\;3.\;4.\;5\ldots\ldots}.$$

$$\frac{(m^2-2^2.(4s-1)^2)}{4s\;\;(4s+1)}\left(\frac{x}{4}\right)^{4s+1} \;\&c.$$

85) Einen Bogen oder Winkel $= \beta$ in m gleiche Theile zu theilen.

Man ſuche die chorda $\frac{1}{m}\beta$ und trage dieſe m mal im Bogen fort, ſo iſt der Bogen und folglich der Winkel in m gleiche Theile getheilt.

Es iſt aber chorda $\frac{1}{m}\beta = 2\sin\frac{\beta}{2m} = \sin\frac{\alpha}{m}$ Nun ſei $\sin\alpha = a = \frac{1}{2}$ chorda β. Eben ſo ſei nun $\sin\frac{1}{m}\alpha = \sin\frac{u}{m}\alpha$ mithin $u = 1$; folglich iſt, indem man 1 Statt u in die Gleichung in (7ε) zum Finden, des Sinus des Bogens $\frac{u}{m}\alpha$ aus des Bogens α Sinus a, ſetzt

$$\text{chorda}\,\frac{1}{m}\beta = 2.\sin\frac{1}{2}.\frac{\beta}{m} = 2.\left[\frac{a}{m} + \frac{(1^2m^2-1^2)}{2.\;3}\left(\frac{a}{m}\right)^3\right.$$

$$+\frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2.m^2-1^2)}{2.\;3.\;4.\;5}\left(\frac{a}{m}\right)^5 + \frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2m^2-1^2)}{2.\;3.\;4.\;5}.$$

$$\frac{(5^2m^2-1^2)}{6.\;7}\left(\frac{a}{m}\right)^7 + \frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2m^2-1^2)(5^2m^2-1^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7}.$$

$$\frac{(7^2.m^2-1^2)}{8.\;9}\left(\frac{a}{m}\right)^9 + \frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2.m^2-1^2)\ldots}{2.\;3.\;4.\;5\ldots}.$$

$$\frac{(9^2.m^2-1^2)}{\varepsilon.\;\varrho}\left(\frac{a}{m}\right)^\varrho \ldots + \frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2.m^2-1^2)\ldots}{2.\;3.\;4.\;5\ldots}.$$

$$\left.\frac{(m^2(2s-1)^2-1^2)}{2s.\;(2s+1)}\left(\frac{a}{m}\right)^{2s+1} \&c.\right]$$

z. B. Es ſei $a = \frac{1}{2} = \sin \frac{1}{10}\pi = \sin \frac{5}{10}\pi = -\sin \frac{7}{10}\pi = -\sin \frac{9}{10}\pi = \frac{1}{2}$ chorda $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ chorda $\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}$ chorda $\frac{12}{10}\pi = -\frac{1}{2}$ chorda $\frac{1\varepsilon}{10}\pi$. So iſt

$$\text{chorda}\,\frac{1}{6}\frac{\pi}{m} = 2.\Big[\frac{1}{2m} + \frac{(1^2.m^2-1^2)}{2.\quad 3}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^3 + \frac{(1^2.m^2-1^2)}{2.\quad 3}.\frac{(3^2m^2-1^2)}{4.\quad 5}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^5 + \frac{(1^2.m^2-1^2)(3^2m^2-1^2)(5^2m^2-1^2)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6\quad 7}.\Big(\frac{1}{2m}\Big)^7 \&c.\Big]$$

86) **Den Quadranten in m gleiche Theile zu theilen.**

Man ſuche den Sinus von $\frac{q}{2m}$ aus dem Halbmeſſer zu finden, nehme dieſen doppelt, und trage die dadurch erhaltne chorda $\frac{a}{m}$; m mal im Quadranten fort, ſo hat man dieſen in m gleiche Theile getheilt. Um den $\sin \frac{1}{2m}q$ zu beſtimmen, hat man nur in die für den Sinus $n\alpha$ in (68) erhaltene Formel, $\frac{1}{2m}$ Statt n und q Statt α, auch 1 Statt a zu ſetzen.

Mithin iſt, da chorda $\frac{1}{m}q = 2.\sin\frac{1}{2m}q = 2\sin n\alpha$ geſetzt iſt.

$$\text{chorda}\,\frac{1}{m}q = 2.\Big[\frac{1}{2m} + \frac{(2^2m^2-1)}{2.\quad 3}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^3 + \frac{(2^2m^2-1)}{2.\quad 3}.\frac{(6^2m^2-1)}{4.\quad 5}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^5 + \frac{(2^2m^2-1)(6^2m^2-1)(\varepsilon^2m^2-1)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7}\Big(\frac{1}{2m}\Big)^7 \&c.\Big]$$

$$\text{chorda}\,\frac{1}{m}q = \frac{1}{m} + \frac{(2^2m^2-1)}{4.\quad 6}\Big(\frac{1}{m}\Big)^3 + \frac{(2^2m^2-1)(6^2.m^2-1)}{4.\quad 6.\quad 8.\quad \varepsilon}.\Big(\frac{1}{m}\Big)^5 + \frac{(2^2.m^2-1)(6^2.m^2 1)(\varepsilon^2.m^2-1)}{4.\quad 6.\quad 8.\quad \varepsilon.\quad 10.\quad 12}\Big(\frac{1}{m}\Big)^7 + \frac{(2^2.m^2-1)}{4.\quad 6}.\frac{(6^2\,m^2-1)(\varepsilon^2.m^2-1)(12^2.m^2-1)}{8.\quad \iota.\quad 10.\quad 12.\quad 14.\quad 16}\Big(\frac{1}{m}\Big)^9 + \frac{(2^2\,m^2-1)}{4.\quad 6}.$$

(6²

$$\frac{(6^2m^2-1)\dots(16^2m^2-1)}{8.\ \varepsilon.\ \dots\ 18.\ 1\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{8}\dots+\frac{(2^2m^2-1)(6^2m^2-1)\dots}{4.\ 6.\ 8.\ \varepsilon\ \dots}$$
$$\frac{(m^2.(4s-2)^2-1)}{4s\ (4s+2)}\left(\frac{1}{m}\right)^{2s+1}\ \&c.$$

87) Den Sinus des 3, 5, 7 u. (2s+1) fachen Bogens, wie auch des 2, 4, 6, 8, ε u. 2s fachen Bogens aus dem Sinus a des einfachen Bogens α zu finden.

Da nach (68) der Sinus des n fachen Bogens, oder da

$$\sin n\alpha = n.a - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.a^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.a^5$$
$$\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.a^7 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$
$$\frac{(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{6.\ 7.\ 8.\ 9}.a^9 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \dots\ \varepsilon.\ \varrho}.a^{\varrho}$$
$$\dots - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\dots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \dots(4s-2)(4s-1)}.a^{4s-1} + \frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$
$$\frac{(n^2-3^2)\dots(n^2-(4s-1)^2)}{4.\ 5\ \dots\ 4s\ (4s+1)}.a^{4s+1}\ \&c.$$
So ſetze man erſtlich nach und nach 1, 3, 5, 7, 9, ſtatt n in dieſe Formel, und man erhält den Ausdruck für den Sinus des 3, 5, 7, 9 fachen Bogens aus des einfachen Bogens α Sinus a zu finden.

Wenn so iſt

$n=3$ | $\sin 3\alpha = 3a - \frac{3.(3^2-1^2)}{2.\ 2.\ 3}a^3$. Denn $\frac{n^2-3^2}{4.\ 5}$ iſt dann $=\frac{3^2-3^2}{4.\ 5.}=0$

$n=5$ | $\sin 5\alpha = 5a - \frac{5.(5^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{5.(5^2-1^2)(5^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5$ und die übrigen Glieder ſind alle o, weil einer ihrer Factoren $\frac{5^2-5^2}{6.\ 7}=0$ iſt

$n=7$ | $\sin 7\alpha = 7a - \frac{7.(7^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^8 + \frac{7.(7^2-1^2)(7^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{7.(7^2-1^2)(7^2-3^2)(7^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7$ und alle übrigen Glieder ſind o, denn $\frac{7^2-7^2}{8\ \ 9}$ iſt $=0$

Wenn

Wenn n = 9 ſo iſt

$$\sin 9\alpha = 9a - \frac{9(9^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.a^3 + \frac{9(9^2-1^2)(9^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{9(9^2-1^2)(9^2-3^2)(9^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.a^7 + \frac{9(9^2-1^2)(9^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.\frac{(9^2-5^2)(9^2-7^2)}{6.\ 7.\ 8.\ 9}.a^9$$

und alle übrigen Glieder ſind = 0

weil $\frac{9^2-9^2}{\varepsilon.\ \varrho} = 0$ iſt

$$n = \varrho \quad \sin \varrho\alpha = \varrho a - \frac{\varrho(\varrho^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{\varrho(\varrho^2-1^2)(\varrho^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{\varrho(\varrho^2-1^2)(\varrho^2-3^2)(\varrho^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7 + \frac{\varrho(\varrho^2-1^2)(\varrho^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.\frac{(\varrho^2-5^2)(\varrho^2-7^2)}{6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9 - \frac{\varrho(\varrho^2-1^2)(\varrho^2-3^2)(\varrho^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.\frac{(\varrho^2-9^2)}{\varepsilon.\ \varepsilon}a^\varrho$$

die nachfolgenden Glieder ſind alle = 0 da einer von ihren Factoren, in welchen ſie multiplicirt ſind, nämlich $\frac{\varrho^2-\varrho^2}{10.\ 11} = 0$ iſt. Alſo

Wenn | ſo iſt $\sin n\alpha$

$n=3$ | $\sin 3\alpha = 3a - 4a^3$; $n=5$ | $\sin 5\alpha = 5a - 18a^3 + 14a^5$

$n=7$ | $\sin 7\alpha = 7a - 48a^3 + 94a^5. - 54a^7$, wenn $n=9$] ſo iſt

$\sin 9\alpha = 9a - \varepsilon0\,a^3 + 300a^5 - 400a^7 + 194a^9$ u. wenn $n=\varrho$

$\sin \varrho\alpha = \varrho a - 164a^3 + 868a^5 - 1768a^7 + 1768s^9 - 714a^\varrho$

Hier erhalten wir gerade die analytiſchtrigonometriſchen Formeln wieder, welche zur Grundlage aller unſer Unterſuchungen und Entwickelungen dienten, wir ſind gerade an dem nämlichen Punkte angelangt, von welchem wir ausgiengen.

Wenn $n = 2, = 4, = 6, = 8, = \varepsilon, = 10$ u. ſ. w. iſt, ſo iſt $\sin n\alpha$

$$= \sin 2\alpha = 2a - \frac{2.(2^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{2.(2^2-1^2)(2^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{2.(2^2-1^2)(3^2-2^2)(5^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7 \ \&c.$$

$$=\sin 4\alpha = 4a - \frac{4(4^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{4(4^2-1^2)(4^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{4(4^2-1^2)(4^2-3^2)(4^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7\ \&c.$$

$$=\sin 6\alpha = 6a - \frac{6(6^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{6(6^2-1^2)(6^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{(6^2-1^2)(6^2-3^2)(6^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7\ \&c.$$

$$=\sin 8\alpha = 8a - \frac{8(8^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{8(8^2-1^2)(8^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{8(8^2-1^2)(8^2-3^2)(8^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7\ \&c.$$

$$=\sin \varepsilon\alpha = \varepsilon a - \frac{\varepsilon(\varepsilon^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{\varepsilon(\varepsilon^2-1^2)(\varepsilon^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{\varepsilon(\varepsilon^2-1^2)(\varepsilon^2-3^2)(\varepsilon^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7\ \&c.$$

$$=\sin 10\alpha = 10a - \frac{10(10^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}a^3 + \frac{10(10^2-1^2)(10^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 - \frac{10(10^2-1^2)(10^2-3^2)(10^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7\ \&c.$$

Auch hier finden ſich wieder die nämlichen Formeln den Sinus der Vielfachen, nach den geraden Zahlen 2. 4, 6, 8. u. ſ. w., des Bogens α aus des einfachen Bogens α ſinus $= a$ zu finden, die ſich an der Spitze unſerer Abhandlung befinden.

88) Aus dem Querſinus b des Bogens α, den Sinus, Querſinus &c. des Bogens $n\alpha$ zu finden. Die hierzu dienlichen Formeln laßen ſich leicht aus den oben von 68 bis 72 entwickelten, für uns ſo fruchtbar geweſenen Grundformeln: aus dem Sinus a des Bogens α den Sinus, Querſinus &c. des Bogens $n\alpha$ zu finden, herleiten. Wir brauchen nichts weiter zu erwägen als das Verhältniß, daß ſich $2 - b : a = a : b$ und die ſich hieraus ergebende Gleichung $a^2 = 2b - b^2$; folglich $a = 2.\left(\frac{b}{2} - \frac{b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Man darf nur bloß in die beiden mehr erwähn-

wähnten Gleichungen $2.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Statt a ſetzen, und alles, was in einerlei Potenz von b multiplicirt iſt, zuſammen addiren, ſo gehen die verlangten beiden GrundGleichungen hervor.

89) Aus dem Querſinus b des Bogens α den Sinus des Bogens nα zu finden.

Weil $\sin n\alpha = na - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\,2.\,3}a^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}a^5 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}a^7 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\frac{(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{6.\,7.\,8.\,9}a^9 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,\ldots\,\text{ε}.\,\text{ϙ}}a^{\text{ϙ}}$ &c.

$= na\Big[1 - \frac{(n^2-1^2)}{2.\,3}a^2 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.\,3.\,4.\,5}a^4 - \frac{(n^2-1^2)}{2.\,3}.\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{4.\,5.\,6.\,7}a^6 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}a^8 - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{2.\,3.\,4.\,5\,\ldots\,\text{ε}.\,\text{ϙ}}a^{\text{ε}}\ \&c.\Big]$ und auch $a = 2.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

ſo iſt $\sin n\alpha = n.2.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.\Big[1 - \frac{(n^2-1^2)}{2.\,3}.\,2^2.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \pm \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.\,3.\,4.\,5}.\,2^4.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^3.\,2^6 + \frac{(n^2-1^2)}{2.\,3}.\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}.\,2^8.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^4 - \frac{(n^2-1^2)}{2.\,3}.\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)(n^2-9^2)}{4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9.\,\text{ε}.\,\text{ϙ}}\,2^{\text{ε}}.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^5\ \&c.\Big]$

und da $2n\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2n\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2n}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{n.3}{4.6} - \frac{n}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{n.3.5}{4.6.8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} - \frac{n.3.5.7}{4.6.8.\text{ε}}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\text{ϙ}}{2}}$ &c, wenn man nämlich in die

be-

bekannte Binominalformel $a = \frac{b}{2}$ und $b = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ auch $m = \frac{1}{2}$ ſetzt

Mithin wenn $1 - \frac{(n^2-1^2)}{2.\ \ 3}.2^2.\left(\frac{b}{2}-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^1 + \frac{(n^2-1^2)}{2.\ \ 3}.$
$\frac{(n^2-3^2)}{4.\ \ 5}2^4\left(\left(\frac{b}{2}\right)-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2$ &c. $= 1 - \frac{n^2-1^2}{2.\ \ 3}\left[4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{2}}\right.$
$\left.-4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4}{2}}\right] + 14.\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4}{2}}-2\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{6}{2}}+\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}}\right]$
$-54.\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{6}{2}}-3\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}}+3\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right.$
&c.$\left.\right] + 194\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}}\right.$
$-4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$&c$\left.\right] - 514\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ \varepsilon.\ \varrho}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ &c.
$= 1 - 4.\frac{(n^2-1^2)}{2.\ \ 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{2}} + 14.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4}{2}}$
$-54.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{6}{2}} + 194.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.$
$\frac{(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}} - 714.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-5^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ \ldots\ \varepsilon.\ \varrho}$
$\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ &c. $= \frac{\sin n\alpha}{n \sin \alpha}$ So iſt

$\sin n\alpha = \left[1 - 4.\frac{(n^2-1^2)}{2.\ \ 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{2}} + 14.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 4}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4}{2}}\right.$
$-54.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{6}{2}} + 194.\frac{(n^2-1^2)}{2.\ \ 3}.$
$\frac{(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}} - 714.\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots}.$
$\frac{(n^2-5^2)}{\varepsilon.\ \varrho}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ &c$\left.\right] \times \left[2n\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{n}{1}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{n}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{n.3.}{4.6}\right.$
$\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}} - \frac{n.3.5}{4.6.8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} - \frac{n.3.5.7}{4.6.8.\varepsilon}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}$ &c.$\left.\right] = 2n\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$-8.\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ \ 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 28.\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$-88.\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+368.\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(n^2-2^2).(n^2-4^2)}{4\ \ 5\ \ 8.\ \ 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}-1228\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)..(n^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ ...\ 8.\ 9}.$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.-n\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.\ 2\ 3.\ 4.\ 5}.$$

$$14\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}.54\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}194.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.-\frac{n}{4}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7}.4\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.-\frac{n}{8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3.}\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}2\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.-\frac{n.3.5.}{4.6\ 8.}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}+\frac{n(n^2-1^2).}{2.\ 3.\ 4.}$$

$$\frac{3.5.5.7.}{5.6.7.8.}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.-\frac{n.3.5.7}{4.6.8.8}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\&c.$$

Und wenn man alles, was in einerlei Potenz von $\left(\frac{b}{2}\right)$ multiplicirt iſt addirt, und übrigens gehörig ordnet und formet; ſo iſt

$$\text{ſin } n\alpha=2n.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2n(2^2n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2n(2^2n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(2^2n^2-3^2)}{4.\ 5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2n(2^2n^2-1^2)(2^2n^2-3^2)(2^2n^2-5^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$+\frac{2n(2^2n^2-1^2)(2^2n^2-3^2)(2^2n^2-5^2)(2^2n^2-7^2)}{2.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$-\frac{2n(2^2n^2-1^2)(2^2n^2-3^2)...(2^2n^2-9^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ ...\ 8.\ 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}\ ......$$

$$-\frac{2n(2^2n^2-1^2)(2^2n^2-3^2)\ ...\ (2^2n^2-(4s-3)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ ...\ (4s-2)(4s-1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4s-1}{2}}$$

$$+\frac{2n(2^2n^2-1^2)(2^2n^2-3^2)...(2^2n^2-(4s-1)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ ...\ 4s.\ (4s+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4s+1}{2}}\&c.$$

88) Aus dem Querſinus b des Bogens α den Querſinus des Bogens $n\alpha$ zu finden.

$$\text{Daquerſin } n\alpha=\frac{n^2}{2}a^2-\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}a^4+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

(n²

$\frac{(n^2-4^2)}{5\cdot 6}a^6 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}a^8 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \varepsilon}a^{\varepsilon} - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots}\cdot$
$\frac{(n^2-\varepsilon^2)}{\text{Ϙ}\cdot 10}a^{10}$ &c. und $a^2=(2b-b^2)$ So iſt

$\text{querſin}\, n\alpha = \frac{n^2}{2}(2b-b^2) - \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}(2b-b^2)^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{(n^2-4^2)}{5\cdot 6}(b-b^2)^3 + \frac{n^2}{2}\cdot\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}(2b-b^2)^4$
$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \varepsilon}(2b-b^2)^5 - \frac{n^2}{2}\cdot$
$\frac{2^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-\varepsilon^2)}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots \text{Ϙ}\cdot 10}(2b-b^2)^{\varepsilon}$ &c. Potenzirt man und addirt dann 2tens alles, was in einerlei Potenz von b multiplicirt iſt, zuſammen, ſo erhält man nachfolgende 1ſte und 2te Reihen.

$\text{querſin}\, n\alpha = \frac{n^2}{2}(2b-b^2) - \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}[4b^2-4b^3+b^4]$
$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}[8b^3-10b^4+6b^5-b^6] - \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{5\cdot 6\cdot 6\cdot 7}[14b^4-54b^5+80b^6\,\&c.] + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \varepsilon}[28b^5-14b^6\,\&c.]$
$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots\ldots(n^2-\varepsilon^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots\ldots \text{Ϙ}\cdot 10}54b^6\,\&c.$

$\text{querſin}\, n\alpha = \frac{n^2}{2}(2b) - \frac{n^2(n^2-1^2)}{2\cdot 3\cdot 4}(2b)^2 - \frac{n^2(n^2-1^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{(n^2-2^2)}{5\cdot 6}(2b)^3 + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}(2b)^4$
$-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot \varepsilon}(2b)^5 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot$
$\frac{n^2-2^2)\ldots(n^2-5^2)}{5\cdot 6\ldots \text{Ϙ}\cdot 10}(2b)^6\,\&c. - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots}\cdot$
$\frac{(n^2-(2s)^2)}{(4s+1)(4s+2)}(2b)^{2s+1} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2s+1)^2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots(4s+1)(4s+2)}\cdot$
$(2b)^{2s+2}$ &c.

Oder

Oder querſin $n\alpha = \frac{2^2 n^2}{2} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{4}{2}}$

$+ \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{6}{2}} - \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot$

$\frac{(2^2 n^2 - 4^2)(2^2 n^2 - 6^2)}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{8}{2}} + \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot$

$\frac{(2^2 n^2 - 6^2)(2^2 n^2 - 8^2)}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \varepsilon} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2) \ldots}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots} \cdot$

$\frac{(2^2 n^2 - \varepsilon^2)}{9 \cdot 10} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{10}{2}} \ldots + \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2) \ldots}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots} \cdot$

$\frac{(2^2 n^2 - (4s-4)^2)}{(4s-3)(4s-2)} \left(\frac{b}{2}\right)^{4s-2} - \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2) \ldots}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots} \cdot$

$\frac{(2^2 n^2 - (4s-2)^2)}{(4s-1)\,4s} \left(\frac{b}{2}\right)^{4s}$ &c.

89) Setzt man in eine dieſer beiden Formeln nach und nach n gleich 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c., ſo erhält man folgende beſondere Formeln, den Querſinus des 2, 3, 4, 6, 7 &c. fachen Bogens aus des einfachen Bogens Querſinus zu finden. querſin $2\alpha = 4b - 2b^2$; querſin $3\alpha = 9b - 10b^2 + 4b^3$; querſin $4\alpha = 14b - 34b^2 + 28b^3 - 8b^4$; querſin $5\alpha = 21b - 84b^2 + 98b^3 - 68b^4 + 14b^5$; querſin $6\alpha = 30b - 156b^2 + 314b^3 - 300b^4 + 140b^5 - 28b^6$; querſin $7\alpha = 41b - 288b^2 + 820b^3 - 930b^4 + 868b^5 - 314b^6 + 54b^7$; querſin $8\alpha = 54b - 480b^2 + 1680b^3 - 3080b^4 + 3314b^5 - 1914b^6 + 714b^7 - \varepsilon 8b^8$; querſin $9\alpha = 69b - 760b^2 + 3260b^3 - 8300b^4 + 9900b^5 - \varepsilon 140b^6 + 5000b^7 - 1400b^8 + 194 \cdot b^9$; u. ſ. w.

90) Den Coſinus des 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. ſ. w. fachen Bogens aus des einfachen Bogens α Coſinus c zu finden.

Weil coſin $2\alpha = 1 -$ querſin 2α; coſin $3\alpha = 1 -$ querſin 3α; und coſin $n\alpha = 1 -$ querſin $n\alpha$ auch $c = 1 - b$ oder $b = 1 - c$; ſo ziehe man alle die in 89 gefundenen analytiſchen Gleichungen von 1 als dem Halbmeßer ab, und ſetze in ſolche $1 - c$ ſtatt b. Auf dieſe Weiſe erhält man die verlangte Coſinuße. Mit-

hin

hin iſt $1 - 4b + 2b^2 = 1 - 4(1-c) + 2(1-c)^2 = 1 - 4 + 4c + 2 - 4c + 2c^2 = 2c^2 - 1 = \cos 2\alpha$; $1 - 9b + 10b^2 - 4b^3 = 1 - 9(1-c) + 10(1-c)^2 - 4(1-c)^3 = 4c^3 - 3c = \cos 3\alpha$; $1 - 14b + 34b^2 - 28b^3 + 8b^4 = 1 - 14(1-c) + 34(1-c)^2 - 28(1-c)^3 + 8(1-c)^4 = 8c^4 - 8c^2 + c^0 = \cos 4\alpha$;

$1 - 21b + 84b^2 - \varrho 8b^3 + 68b^4 - 14b^5 = 1 - 21(1-c) + 84(1-c)^2 - \varrho 8(1-c)^3 + 68(1-c)^4 - 14(1-c)^5 = 14c^5 - 18c^3 + 5c = \cos 5\alpha$;

$1 - 30b + 156b^2 - 314b^3 + 300b^4 - 140b^5 + 28b^6 = 1 - 30(1-c) + 156.(1-c)^2 - 314(1-c)^3 + 300(1-c)^4 - 140(1-c)^5 + 28(1-c)^6 = 28c^6 - 40c^4 + 16c^2 - c^0 = \cos 6\alpha$;

$1 - 41b + 288b^2 - 820b^3 + \varrho 80b^4 - 868b^5 + 314b^6 - 54b^7 = 1 - 41(1-c) + 288(1-c)^2 - 820(1-c)^3 + \varrho 80(1-c)^4 - 868(1-c)^5 + 314(1-c)^6 - 54.(1-c)^7 = 54c^7 - 94c^5 + 48c^3 - 7c = \cos 7\alpha$

$1 - 54b + 480b^2 - 1680b^3 + 3080b^4 - 3314b^5 + 1\varrho 14b^6 - 714b^7 + \varepsilon 8b^8 = 1 - 54.(1-c) + 480(1-c)^2 - 1680(1-c)^3 + 3080(1-c)^4 - 3314(1-c)^5 + 1\varrho 14(1-c)^6 - 714.(1-c)^7 + \varepsilon 8(1-c)^8 = \varepsilon 8c^8 - 194c^6 + 114c^4 - 28c^2 + c^0 = \cos 8\alpha$; $1 - 69b + 760b^2 - 3260b^3 + 8300b^4 - \varrho\varrho 00b^5 + \varepsilon 140b^6 - 5000b^7 + 1400b^8 - 194b^9 = 1 - 69(1-c) + 760(1-c)^2 - 3260(1-c)^3 + 8300(1-c)^4 - \varrho\varrho 00(1-c)^5 + \varepsilon 140(1-c)^6 - 5000(1-c)^7 + 1400(1-c)^8 - 194(1-c)^9 = 194c^9 - 400c^7 + 300c^5 - \varepsilon 0c^3 + 9c = \cos 9\alpha$

Mithin

$\cos \alpha = c$

$\cos 2\alpha = 2c^2 - c^0$

$\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$

$\cos 4\alpha = 8c^4 - 8c^2 + c^0$

$\cos 5\alpha = 14c^5 - 18c^3 + 5c$

$\cos 6\alpha = 28c^6 - 40c^4 + 16c^2 - c^0$

$\cos 7\alpha = 54c^7 - 94c^5 + 48c^3 - 7c$

$\cos 8\alpha = \varepsilon 8c^8 - 194c^6 + 114c^4 - 28c^2 + c^0$

$\cos 9\alpha = 194c^9 - 400c^7 + 300c^5 - \varepsilon 0c^3 + 9c$

Das

Das allgemeine Geſetz, wornach die Coſinuße der vielfachen Bogen in einer analytiſchen Function des einfachen Bogens Coſinus gegeben ſind, werden wir weiter unten aus der Formel den Coſinus des Bogens $n\alpha$ aus des einfachen Bogens Querſinus zu finden, entwickeln.

91) Den Coſinus, Quercoſinus, die Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante des Bogens $n\alpha$ aus des Bogens α Querſinus b zu finden.

zuvörderſt den Coſinus

da $\cos n\alpha = 1 -$ querſin $n\alpha$, ſo iſt nach 8ε

$$\text{a) } \operatorname{coſin} n\alpha = 1 - \frac{2^2n^2}{2}\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$- \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)(2^2n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\left(\frac{b}{2}\right)^3 + \frac{2^2n^2(2^2n-2^2)}{2.\ 3.\ 4}\cdot$$

$$\frac{(2^2n^2-4^2)(2^2n^2-6^2)}{5.\ 6.\ 7.\ 8}\left(\frac{b}{2}\right)^4 - \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)(2^2n-4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\cdot$$

$$\frac{(2^2n^2-6)(2^2n-8^2)}{7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}\left(\frac{b}{2}\right)^5 + \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)(2^2n^2-4^2)\ldots}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots}\cdot$$

$$\frac{(2^2n^2-\varepsilon)}{\varrho.\ 10}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^6 - \frac{2^2n^2.(2^2n^2-2^2)(2^2n^2-4^2)\ldots(2^2n^2-10^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots 11.\ 12}\cdot$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^8\ldots - \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)(2^2n^2-4^2)\ldots(2^2n^6-(2s-2)^2 2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ (4s-3)\ (4s-2)}\cdot$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^{4s-2} + \frac{2^2n^2(2^2n^2-2^2)(2^2n^2-4^2)\ldots(2^2n^2-(2s-1)\ 2^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ (4s-1)\ 4s}\cdot$$

$\left(\frac{b}{2}\right)^{4s}$ &c. Oder

$$\text{b) } \cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2}\cdot(2b) + \frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\ 3.\ 4}(2b)^2 - \frac{n^2}{2}\cdot$$

$$\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{3.\ 4.\ 5.\ 6}(2b)^3 + \frac{n\ (n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}(2b)^4$$

$$- \frac{n^2(n-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}(2b)^5 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\ 3.\ 4}\cdot$$

$$\frac{n^2-2^2)\ldots(n^2-5^2)}{5.\ 6\ldots \varrho.\ 10}(2b)^6\ldots - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ \ldots}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots}\cdot$$

$$\frac{(n^2-(2s-2)^2)}{(4s-3)(4s-2)}\cdot(2b)^{2s-1} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ \ldots}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots}\cdot$$

(n²

$$\frac{(n^2-(2s-1)^2)}{(4s-1)\;(4s)}(2b)^{2s} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(2s)^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\ldots(4s+1)(4s+2)}.(2b)^{2s+1}\ \&c.$$

quercoſin $n\alpha = 1 - \sin n\alpha$; ſiehe (89)
tang $n\alpha = (\sin n\alpha).(\cos n\alpha)^{-1}$; ſiehe 89 und a
cotang $n\alpha = (\cos n\alpha)(\sin n\alpha)^{-1}$
ſecant $n\alpha = (\cos n\alpha)^{-1}$; coſec $n\alpha = (\sin n\alpha)^{-1}$

92) Den Coſinus des n fachen Bogens aus des einfachen Bogens α Coſinus c zu finden, wo aber n eine ganze Zahl bedeutet.

Da nach (91, b)

$$\begin{aligned}\cos n\alpha = 1 &- b\frac{n^2}{2}.2 + b^2.\frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\;3.\;4}.2^2 - b^3.\frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\;3.\;4.}.\frac{(n^2-2^2)}{5.\;6}2^3 + b^4.\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}\\ &2^4 - b^5.\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;10}.\\ &2^5 + b^6\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-5^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\ldots 9.\;10}2^6 - b^7.\frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\;3.\;4}.\\ &\frac{(n^2-2^2)\ldots(n^2-6^2)}{5.\;6\ldots 11.\;12}.2^7\ \&c.\end{aligned}$$

Und weil $b = 1 - c$ mithin $-b = c - 1$ und $(-b)^2 = b^2 = (c-1)^2$; $-b^3 = +(c-1)^3$; $+b^4 = (c-1)^4$; $-b^5 = +(c-1)^5$ und überhaupt $(-b)^{2s} = b^{2s} = (c-1)^{2s}$; $(-b)^{2s+1} = -b^{2s+1} = +(c-1)^{2s+1}$

So iſt

$$\begin{aligned}\cos n\alpha = 1 &+ (c-1)\frac{n^2}{2}.2 + (c-1)^2.\frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\;3.\;4}2^2 + (c-1)^3.\\ &\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}2^3 + (c-1)^4.\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}.\\ &\frac{(n^2-3^2)}{7.\;8}2^4 + (c-1)^5.\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}.\\ &\frac{(n^2-4^2)}{9.\;10}.2^5 + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-5^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\ldots 9.\;10}.(c-1)^6.2^6\ \&c.\end{aligned}$$

Und wenn n als eine ganze Zahl angeſehen wird, ſo iſt die Rei- he endlich, denn man ſtößt dann, wenn man ein Glied nach dem andern entwickelt, auf eines, wo $(n^2 - n^2) = 0$ als Factor im Coefficienten vorkömmt, es mag n auch noch ſo groß ſein: und da dieſer Factor dann in allen nachfolgenden Gliedern vorkömmt, ſo müßen ſie auch alle = 0 ſein. Die Reihe iſt dann endlich, und endet mit dem Gliede, in deßen Coefficienten $n^2 - (n-1)^2 = (2n-1).1$ als letzter Factor vorkömmt, auch ſind alle Glieder po- ſitiv. Mithin iſt

$$\cos n\alpha = \Big[1 + (c-1)\frac{n^2}{2}.2 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\ 3.\ 4}(c-1)^2.2^2 + (c-1)^3.$$

$$\frac{n^2(n^2-1^2)}{2.\ 3.\ 4}\frac{n^2-2^2)}{5.\ 6}2^3 + (c-1)^4.\frac{n^2(u^2-1^2)}{2.\ 3.\ 4.}\frac{(n^2-2^2)}{5.\ 6}.$$

$$\frac{(n^2-3^2)}{7.\ 8.}2^4 + (c-1)^5.\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}.$$

$$2^5 + (c-1)^6\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)..(n^2-5^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ ..\ 9.\ 10}2^6 .. + (c-1)^{(n-2)}.$$

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)...(n^2-(n-3)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ ...(2n-5)(2n-4)}2^{n-2} + (c-1)^{n-1}.\frac{n^2}{2}.$$

$$\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ ...\ (n^2-(n-3)^2)\ (n^2-(n-2)^2)}{3.\ 4.\ 5.\ 6\ ...\ (2n-5)(2n-4)(2n-3)(2n-2)}2^{n-1}$$

$$+ (c-1)^n\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)....(n^2-(n-3)^2)(n^2-(n-2)^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ ....(2n-5)(2n-4)(2n-3)(2n-2)}.$$

$$\frac{(n^2-(n-1)^2)}{(2n-1).\ 2n}.2^n\Big]$$

Nun läßt ſich aber dieſe endliche Reihe auch ſo ordnen, daß das letzte Glied zum erſten, das vorletzte zum zweiten, das vor- vorletzte zum dritten &c. das erſte zum letzten, das zweite zum vor- letzten &c. wird, und dann erhält ſie nach folgendes Anſehen. Allein da

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ ...\ (n^2-(n-3)^2)\ (n^2-(n-2)^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ ...\ (2n-5)\ (2n-4)(2n-3)(2n-2)}.$$

$$\frac{(n^2-(n-1)^2)}{(2n-1)\ 2n} = P = O.\frac{(n^2-(n-1)^2)}{(2n-1)\ 2n} = N.\frac{(n^2-(n-2)^2)}{(2n-3)(2n-2)}.$$

$\frac{(n^2-(n-1)^2)}{(2n-1)\ 2n}$. und wenn man dieſen Ausdruck gehörig entwi- ckelt, und in ſeine Theile zerlegt.

$$P = \frac{1.2.3.4.5 \ldots . (n-2)(n-1).\, n.\, n.\, (n+1)(n+2) \ldots (2n-5)}{1.2.3.4.5 \ldots . (n-2)(n-1)\;\; n.\, (n+1)\,(n+2) \ldots (2n-5)}.$$

$$\frac{(2n-4)(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{(2n-4)(2n-3)(2n-2)(2n-1).\,2n} = \tfrac{1}{2} \text{ weil } \frac{(n^2-(n-1)^2)}{(2n-1)\;\; 2n}.$$

$$= \frac{(2n-1).\,1}{2n(2n-1)};\ \frac{(n^2-(n-2)^2)}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{4n-4}{(2n-2)(2n-3)} = \frac{(2n-2)}{(2n-2)}.$$

$$\frac{2}{(2n-3)};\ \frac{(2^2-(n-3)^2)}{(2n-4)(2n-5)} = \frac{6n-9}{(2n-4)(2n-5)} = \frac{(2n-3).\,3}{(2n-4)(2n-5)};$$

$$\frac{(n^2-(n-4)^2)}{(2n-6)(2n-7)} = \frac{8n-14}{(2n-6)(2n-7)} = \frac{(2n-4).\;4}{(2n-6)(2n-7)}$$ So iſt

$$O.\frac{n(n^2-(n-1)^2)}{2n\,(2n-1)} = \tfrac{1}{2} \text{ und } O = \frac{2n\,(2n-1)}{(2n-1).\,1}\tfrac{1}{2};\ N = \frac{2n(2n-1)}{(2n-1).\,1.}.$$

$$\frac{(2n-2)(2n-3)}{(2n-2).\;2.\;2};\ \cos n\alpha = \frac{2^n}{2}(c-1)^n + \tfrac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)}{(2n-1).\,1}\,2^{n-1}.$$

$$(c-1)^{n-1} + \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{(2n-1).1.(2n-2).\;2}\,2^{n-2}\,(c-1)^{n-2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{(2n-1).1.(2n-2).\;2.\;(2n-3).\;3}\,2^{n-3}\,(c-1)^{n-3}$$

$$+ \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{(2n-1).1.(2n-2).\,2.\,(2n-3).\,3.\;(2n-4).\;4}.$$

$$2^{n-4}(c-1)^{n-4} + \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots.(2n-8)}{(2n-1).\;1.\;(2n-2).\;2\;\ldots.\;(2n-5)}.$$

$$\frac{(2n-9)}{5}\,2^{n-5}\,(c-1)^{n-5} + \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots}{(2n-1).\;1.\;(2n-2).\;2.\;\ldots}.$$

$$\frac{(2n-8)(2n-9)(2n-10)(2n-11)}{(2n-5).\;5.\;(2n-6).\;6}\,2^{n-6}\,(c-1)^{n-6} + \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)}{(2n-1).1.}.$$

$$\frac{(2n-2)(2n-3)\;\ldots\ldots\;(2n-10)(2n-11)(2n-10)(2n-11)}{(2n-2).\;2\;\ldots\ldots\;(2n-6)\;\;6.\;\;(2n-7)\;\;8}.$$

$$2^{n-7}(c-1)^{n-7} + \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots.(2n-10)}{(2n-1).\;1.\;(2n-2).\;2\;\ldots.\;(2n-7)}.$$

$$\frac{(2n-11)(2n-12)(2n-13)}{7.\;\;(2n-8).\;\;8}\,2^{n-8}\,(c-1)^{n-8}\;\ldots.\;\text{bis}$$

$$+ \tfrac{1}{2}.\,\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-(2n-2))(2n-(2n-1))}{(2n-1).\;1.\;(2n-2).\;2\;\ldots.\;(2n-n)\;\;.\;\;(2n)}.$$

$$2^{n-n}(c-1)^{n-n}\Big]$$ Da man nun in der bekannten BinominalFor-

 mel

mit $(a+b)^m$ $a = c$ und $b = -1$ auch nach und nach $m = n$; $= (n-1)$; $= n-2$; $= n-3$; $= n-r$, &c. ſetzen kann, ſo iſt, wenn man alles, was in einerlei Potenz von c multiplicirt iſt, gehörig unter und zu einander ordnet.

$$\cos n\alpha = 2^{n-1}\Big[c^n - n c^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} c^{n-2} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot$$

$$\frac{(n-2)}{3} c^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} c^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot$$

$$\frac{(n-3)(n-4)}{4.\ 5} c^{n-5} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6} c^{n-6} - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\cdot$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-6)}{3\ \ldots\ 8} c^{n-7} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 8} c^{n-8}\ \&c.$$

$$+ n.\ c^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.\ 1} c^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 1.\ 2} c^{n-3} - \frac{n(n-1)}{1.\ 1}\cdot$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2.\ 3} c^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4} c^{n-5} - \frac{n}{1}\cdot$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 5} c^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\ 1.\ 2.\ \ldots\ 6} c^{n-7}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-7)}{1.\ 1.\ 2\ \ldots\ 7} c^{n-8}\ \&c. + \frac{n(2n-3)}{4} c^{n-2}$$

$$- \frac{n(2n-3)(n-2)}{4.\ 1} c^{n-3} + \frac{n(2n-3)(n-2)(n-3)}{4.\ 1.\ 2} c^{n-4}$$

$$- \frac{n(2n-3)(n-2)(n-3)(n-4)}{4.\ 1.\ 2.\ 3} c^{n-5} + \frac{n(2n-3)(n-2)(n-3)}{4.\ 1.\ 2}\cdot$$

$$\frac{(n-4)(n-5)}{3.\ 4} c^{n-6} - \frac{n(2n-3)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}\cdot$$

$$\frac{(n-6)}{5} c^{n-7} + \frac{n(2n-3)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-7)}{4.\ 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6} c^{n-8}\ \&c.$$

$$+ \frac{(2n-5)n(n-2)}{1.\ 3.\ 4} c^{n-3} - \frac{(2n-5)n(n-2)(n-3)}{1.\ 3.\ 4.\ 1} c^{n-4}$$

$$+ \frac{(2n-5).n(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 3.\ 4\ 1.\ 2} c^{n-5} - \frac{(2n-5)n(n-2)(n-3)}{1.\ 3.\ 4.\ 1.}\cdot$$

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2.\ 3} c^{n-6} + \frac{(2n-5).n(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 3.\ 4.\ 1.\ 2.\ 3}\cdot$$

(n−6)

$$\frac{(n-6)}{4}c^{n-7} - \frac{(2n-5)\,n(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.\ 3.4\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n-7)}{5}c^{n-8}\ \&c. + \frac{n(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{4.\ 6.\ 8.}c^{n-4} - \frac{n(2n-5)}{4.}.$$

$$\frac{(2n-7)(2n-6)(n-4)}{6.\ 8.\ 1}c^{n-5} + \frac{n(2n-5)(2n-7)(2n-6)(n-4)}{4.\ 6.\ 8.\ 1.}.$$

$$\frac{(n-5)}{2}c^{n-6} - \frac{n(2n-5)(2n-7)(2n-6)(n-4)(n-5)(n-6)}{4.\ 6.\ 8.\ 1.\ 2.\ 3.}.$$

$$c^{n-7} + \frac{n(2n-5)(2n-7)(2n-6)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{4.\ 6.\ 8\ 1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

$$e^{n-8}\ \&c. + \frac{n(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9)}{4.\ 6.\ 8.\ ε}c^{n-5}$$

$$- \frac{n(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9)(n-5)}{4.\ 6.\ 8.\ ε.\ 1}c^{n-6} + \frac{n(2n-6)}{4}.$$

$$\frac{(2n-7)(2n-8)(2n-9)(n-5)(n-4)}{6.\ 8.\ ε.\ 1.\ 2}c^{n-7} - \frac{n(2n-6)(2n-7)}{4.\ 6}.$$

$$\frac{(2n-8)(2n-9)(n-5)(n-4)(n-6)}{8.\ ε.\ 1.\ 2.\ 3}c^{n-8}\ \&c. + \frac{n(2n-7)}{4}.$$

$$\frac{(2n-8)(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)}{6.\ 8.\ ε.\ 10}c^{n-6} - \frac{n(2n-7)(2n-8)}{4.\ 6}.$$

$$\frac{(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)(n-6)}{8.\ ε.\ 10.\ 1}c^{n-7} + \frac{n(2n-7)(2n-8)}{4.\ 6}.$$

$$\frac{(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)(n-6)(n-7)}{8.\ ε.\ 10.\ 1.\ 2}c^{n-8}\ \&c. + \frac{n(2n-8)}{1.\ 4}.$$

$$\frac{(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)(2n-10)(2n-11)}{6.\ 8.\ ε.\ 10.\ 12}c^{n-7} - \frac{n(2n-8)}{4}.$$

$$\frac{(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)(2n-10)(2n-11)(n-7)}{6.\ 8.\ ε.\ 10.\ 12.\ 1}c^{n-8}\ \&c.$$

$$+ \frac{n(2n-9)(2n-ε)(2n-ϙ)(2n-10)(2n-11)(2n-12)}{4.\ 6.\ 8.\ ε.\ 10.\ 12}.$$

$$\frac{(2n-13)}{14}c^{n-8}\ \&c.] = 2^{n-1}\Big[c^{n} + 0.c^{n-1} - \frac{n}{4}c^{n-2}$$

$$-0.c^{n-3} - \frac{n(n-3)}{4\ 8}c^{n-4} + 0.c^{n-5} + \frac{n(n-4)(n-5)}{4.\ 8.\ 10}c^{n-6}$$

$$-0.c^{n-7} - \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.\ 8.\ 10.\ 14}c^{n-8} + 0c^{n-9} + \frac{n(n-6)}{4.\ 8}.$$

(n—7)

$$\frac{(n-7)(n-8)(n-9)}{10.\ 14.\ 18}c^{n-\varepsilon}-0.c^{n-\varrho}-\frac{n(n-7)(n-8)(n-9)}{4.\ 8.\ 10.\ 14.}\cdot$$

$$\frac{(n-\varepsilon)(n-\varrho)}{18.\ 20}c^{n-10}+0.c^{n-11}+\frac{n(n-8)(n-9)(n-\varepsilon)(n-\varrho)}{4.\ 8.\ 10.\ 14.\ 18}\cdot$$

$$\frac{(n-10)(n-11)}{20\ \ 24}c^{n-12}\ \&c. \ldots +\frac{n(n-2s)(n-2s+1)(n-2s+2)}{4.\ 8.\ 10.\ 14}\cdot$$

$$\frac{(n-2s+3)\ldots(n-4s+3)}{18\ \ldots\ (8s-4)}c^{n-4s+2}-\frac{n(n-2s+1)(n-2s+2)}{4.\ 8.\ 10}\cdot$$

$$\frac{(n-2s+3)(n-2s+4)(n-2s+5)\ldots.(n-4s+3)(n-4s+2)}{14.\ 18.\ 20\ \ldots.\ (8s-8).\ (8s-4)}\cdot$$

$$\frac{(n-4s+1)c^{n-4s}}{8s}+\frac{n(n-2s+2)(n-2s+3)(n-2s+4)\ldots}{4\ \ 8.\ 10.\ 14\ \ldots}\cdot$$

$$\left.\frac{(n-4s+1)(n-4s)(n-4s-1)}{(8s-4)\ (8s).\ (8s+4)}c^{n-4s-2}\ \&c.\right]=\cos n\alpha$$

Mithin iſt auch

$$\cos n\alpha=\tfrac{1}{2}2^{n}.\left[c^{n}-\frac{n(n-1)}{2(2n-2)}c^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-2)\ 4\ (2n-4)}\cdot\right.$$

$$c^{n-4}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2(n-2)\ 4\ (2n-4)(\ 6\ (2n-6)}c^{n-6}+\frac{n(n-1)}{2(2n-2)}\cdot$$

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-6)(n-7)}{4\ (2n-4)\ldots\ 8.\ (2n-8)}c^{n-8}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-2)\ 4.\ (2n-4)}\cdot$$

$$\frac{\ldots(n-8)(n-9)}{\ldots\ \varepsilon.\ (2n-\varepsilon)}c^{n-\varepsilon}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\varepsilon)}{2(2n-2)\ 4.\ (2n-4)\ldots\ 10}\cdot$$

$$\frac{(n-\varrho)}{(2n-10)}c^{n-10}\ \ldots..-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-4s+4)}{2(2n-2)\ 4.\ (2n-4)\ldots(4s+2)}\cdot$$

$$\frac{(n-4s+3)}{(2n-4s+2)}c^{n-4s+2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots.}{2(2n-2).\ 4.\ (2n-4)\ \ldots.}\cdot$$

$$\frac{(n-4s+2)(n-4s+1)}{4s\ \ (2n-4s)}c^{n-4s}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots}{2(2n-2)\ 4.\ (2n-4)\ \ldots}\cdot$$

$$\left.\frac{(n-4s)(n-4s-1)}{(4s+2)(2n-4s-2)}c^{n-4s-2}\ \&c.\right]$$

93) Wird in die ſo eben in 92 zum Reſultat erhaltene Formel, aus des einfachen Bogens α Coſinus c den Coſinus des $n$fachen Bogens zu finden, n nach und nach gleich den ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. geſetzt, ſo erhält man die bereits oben (in 90) befund.

gefundenen analytiſchen Ausdrücke zum Finden des Coſinus des 2, 3. 4, 5, 6, 7, 8 &c. fachen Bogens aus des einfachen Bogens Coſinus,

94) Aus dem Querſinus b des Bogens α den Sinus, Querſinus &c. des Bogens $\frac{u}{m}\alpha$ zu finden.

Man ſetze in die in (89, 8ε bis 91) erhaltenen und ſtehenden Formeln überall $n = \frac{u}{m}$ wo $u < m$, ſo gehen zuvörderſt folgende zwei Grundformeln hervor, die übrigen ſechs ergeben ſich, wie bekannt, aus dieſen beiden trigonometriſchen Größen.

$$\text{querſin}\,\frac{u}{m}\alpha = \frac{(2^2u^2)}{2}\left(\frac{b}{2m^2}\right) + \frac{2^2u^2(2^2m^2-2^2u^2)}{2.\ 3.\ 4}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^2$$

$$+ \frac{2^2u^2(2^2m^2-2^2u^2)(4^2m^2-2^2u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^3 + \frac{2^2u^2}{2}.$$

$$\frac{(2^2m^2-2^2u^2)(4^2m^2-2^2u^2)(6^2m^2-2^2u^2)}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^4 + \frac{2^2u^2}{2}.$$

$$\frac{(2^2m^2-2^2u^2)(4^2m^2-2^2u^2)(6^2m^2-2^2u^2)(8^2m^2-2^2u^2)}{3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}.$$

$$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^6 \ldots + \frac{2^2u^2(2^2m^2-2^2u^2)(4^2m^2-2^2u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.$$

$$\frac{(6^2m^2-2^2u^2)\ldots(m^2(2s-2)^2-2^2u^2)}{7.\ 8\ \ldots\ (2s-1).\ (2s)}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^s \text{ \&c.}$$

$$\sin\frac{u}{m}\alpha = \frac{2u}{m}\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{2u(m^2.1^2-2^2u^2)}{1.\ 3.\ 3}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2u}{1}.$$

$$\frac{(1^2m^2-2^2u^2)(3^2m^2 2^2u^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}\left(\frac{b}{2.m^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{2u(1^2m^2-2^2u^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(3^2m^2-2^2u^2)(5^2m^2-2^2u^2)}{4\ 5.\ 6.\ 7}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{2u(1^2m^2-2^2u^2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\frac{(3^2m^2-2^2.u^2)(5^2m^2-2^2u^2)(7^2m^2-2^2u^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$+ \frac{2u(1^2m^2-2^2u^2)(3^2m^2-2^2u^2)(5^2m^2-2^2u^2)(7^2m^2-2^2u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}.$$

$$\frac{(9^2m^2-2^2u^2)}{\varepsilon.\ \varrho}\left(\frac{b}{2m^2}\right)^{\frac{\varrho}{2}} \ldots + \frac{2u(1^2m^2-2^2u^2)(3^2m^2-2^2u^2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

(5²

$$\frac{(5^2m^2-2^2u^2)}{6.}\frac{\ldots\ldots}{7\ \ldots\ldots}\frac{(m^2(2s-3)^2-2^2u^2)}{(2s-2)}\frac{(m^2(2s-1)^2-2^2u^2)}{(2s-1).\ 2s.\ (2s+1)}.$$

$$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^{2s\ 1} \&c.$$

95) Den Coſinus des $u$fach $m$ten Theils des Bogens α aus des Bogens α Coſinus c zu finden, läßt ſich keine Formel angeben, weil wenn man in die unendliche Reihe zum Finden des Coſinus des Bogens $\frac{u}{m}\alpha$ aus des Bogens α Querſinus $1-c$ Statt b zu ſetzen wollte, man unendlich viele Glieder erhält, welche in die erſte, eben ſo in die 2te, 3te, u. ſ. w. Potenz von c multiplicirt ſind, und deren Summe ſich nicht angeben läßt.

96) Wenn in den (94) ſtehenden Formeln für den Sinus und Querſinus des Bogens $\frac{u}{m}\alpha$ der Querſinus von $\alpha = b = 2 =$ dem doppelten Halbmeſſer wird, ſo iſt $\alpha = 2q =$ dem doppelten Quadranten und angenommen daß $\frac{u}{m} < 1$, ſo erhält man die bereits weiter oben in 79, 80, 81 gefundenen Formeln: die übrigen in einem Quadranten fallenden Sinuße, Querſinuße, Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Coſekanten aus dem Halbmeſſer $= 1$ zu finden.

97) Aus der Tangente e des einfachen Bogens α den Sinus, Querſinus &c. des Bogens $n\alpha$ zu finden.

Es iſt $\tang \alpha = (\sin \alpha)(\cos \alpha)^{-1}$, mithin $\tang \alpha^2 = \sin \alpha^2 (1-\sin \alpha^2)^{-1}$ folglich $\tang \alpha - \sin \alpha^2 \tang \alpha^2 = \sin \alpha^2$; $\tang \alpha^2 = \sin \alpha^2 . (1+\tang \alpha^2)$; $\sin \alpha^2 = \tang \alpha^2 (1+\tang \alpha^2)^{-1}$

Alſo $\sin \alpha = \tang \alpha . (1+\tang \alpha)^{-\frac{1}{2}}$ und wenn $\sin \alpha = a$ und $\tang \alpha = e$; ſo iſt $a = e . (1+e)^{-\frac{1}{2}}$

Wenn man nun dieſen Werth von a in die oben erhaltenen mehr erwähnten Formeln: den Sinus, Coſinus &c. des Bogens $n\alpha$ aus des Bogens α. Sinus a zu finden; ſetzt und die ganze Glei-

chung,

chung, ſo wie jedes Glied der Reihe beſonders mit $(1+e^2)^{\frac{n}{2}}$ multiplicirt, ſo findet man den analytiſchen Ausdruck, des Sinus, Querſinus &c. des Bogens $n\alpha$ aus des Bogens α Tangente e in einer nach einem Geſetze fortſchreitenden Reihe zu finden. Es iſt alſo nämlich:

$$\text{ſin}\, n\alpha = na - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\,2.\,3}a^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}a^5 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}a^7 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}a^9 - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots\,\varepsilon.\,\varrho}a^{\varrho}\,\&c. - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots(4s-2)(4s-1)}a^{4s-1} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-1)^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\,\ldots(4s)(4s+1)}a^{4s+1}\,\&c.$$

$$= ne(1+e^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\,2.\,3}e^3(1+e^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}e^5(1+e^2)^{-\frac{5}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}e^7(1+e^2)^{-\frac{7}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}e^9(1+e^2)^{-\frac{9}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots\,\varepsilon.\,\varrho}e^{\varrho}(1+e^2)^{-\frac{\varrho}{2}}\,\&c. - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots(4s-2)(4s-1)}e^{4s-1}(1+e^2)^{-\frac{4s+1}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-1)^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,\ldots(4s)(4s+1)}e^{4s+1}(1+e^2)^{-\frac{4s-1}{2}}\,\&c.$$

Mit $(1+e^2)^{\frac{n}{2}}$ beide Theile der Gleichung ſo wie jedes Glied beſonders multiplicirt, giebt

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}}\,\text{ſin}\, n\alpha = ne(1+e^2)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)}{1.\,2.\,3}e^3(1+e^2)^{\frac{n-3}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}e^5(1+e^2)^{\frac{n-5}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}e^7(+e^2)^{\frac{n-7}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}$$

e^9

$$e^9 (1+e^2)^{\frac{n-9}{2}} - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots\ldots(n^2-5^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;\ldots\ldots\;\varepsilon.\;\varrho} e^{\varrho} \cdot$$

$$(1+e^2)^{\frac{n-\varrho}{2}} \ldots\ldots - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots\ldots(n^2-(4s-3)^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;\ldots\ldots(4s-2)(4s-1)} \cdot$$

$$e^{4s-1} (1+e^2)^{\frac{n-4s+1}{2}} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4s-1)^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;\ldots(4s)(4s+1)} \cdot$$

$$e^{4s+1} (1+e^2)^{\frac{n-4s-1}{2}} \text{ etc.}$$

98) Folglich vermittelſt des binomiſchen LehrSatzes

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}} \sin n\alpha = n e + \frac{n(n-1)}{2} e^3 + \frac{n(n-1)(n-3)}{2.\;4.} e^5$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)}{2.\;4.\;6.} e^7 + \frac{n(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}{2.\;4.\;6.\;8} e^9$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-3)\ldots(n-9)}{2.\;4.\;\ldots\;\varepsilon} e^{\varrho} \;\&c. \; - \Big[\frac{n(n^2-1^2)}{1.\;2.\;3} e^3$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n-3)}{1.\;2.\;3\;\;2} e^5 + \frac{n(n^2-1^2)(n-3)(n-5)}{1.\;2.\;3\;\;2\;\;4} e^7$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n-3)(n-5)(n-7)}{1.\;2.\;3.\;2.\;4.\;6} e^9 + \frac{n(n^2-1^2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;2.} \cdot$$

$$\frac{(n-5)(n-7)(n-9)}{4\;\;6\;\;8} e^{\varrho} \;\&c. \Big] + \Big[\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5} e^5$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n-5)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;2} e^7 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5} \cdot$$

$$\frac{(n-5)(n-7)}{2.\;4} e^9 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n-5)(n-7)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;2.\;4.} \cdot$$

$$\frac{n-9)}{6} e^{\varrho} \;\&c. \Big] - \Big[\frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7} e^7$$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n-7)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;2} e^9 + \frac{n(n^2-1^2)}{1.\;2.\;3.} \cdot$$

$$\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n-7)(n-9)}{4.\;5.\;6\;\;7\;\;2.\;\;4} e^{\varrho} \;\&c. \Big] + \Big[\frac{n(n^2-1^2)}{1.\;2.\;3.} \cdot$$

$$\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{4.\;5.\;6.\;7.\;8.\;9} e^9 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\;2\;\;3.\;4.\;5.} \cdot$$

$$\frac{(n^2-5^2)(n^2-7^2)(n-9)}{6.\;7.\;8.\;9.\;2} e^{\varrho} \;\&c. \Big] - \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.\;2.\;3.\;4.\;5.} \cdot$$

$$\frac{\ldots\ldots(n^2-9^2)}{\ldots\;\varepsilon.\;\varrho} e^{\varrho} \text{ etc.}$$

Addirt man nun alles was in einerley Potenz von e multiplicirt iſt, ſo erhält man folgende ſehr anſchauliche Formel.

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}} \sin n\alpha = ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} e^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} e^5 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ldots 7} e^7 + \frac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ldots 9} e^9 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ldots \varrho} e^\varrho \;\&c.\; \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+3)(n-4s+2)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(4s-2)(4s-1)} e^{4s-1} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(4s+1)} e^{4s+1} \;\&c.$$

$$\sin n\alpha = (1+e^2)^{-\frac{n}{2}}. \Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} e^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} e^5 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-6)}{1.\ 2.\ 3.\ldots 7} e^7 + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-8)}{1.\ 2.\ 3.\ldots 9} e^9 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\varepsilon)}{1.\ 2.\ 3.\ldots \varrho} e^\varrho \;\&c.\; \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+3)(n-4s+2)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(4s-2)(4s-1)} e^{4s-1} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+1)(n-4s)}{1.\ 2.\ 3.\ldots(4s)(4s+1)} e^{4s+1} \;\&c.$$

99) Ferner da $a^2 = e^2(1+e^2)^{-1}$ und

$$\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2} a^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4} a^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} a^6 + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} a^8 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon} a^\varepsilon + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-\varepsilon^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 5\ldots\varrho.\ 10} a^{10} \;\&c.$$

$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-4)^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots(4s-3)(4s-2)}a^{4s-2}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\;3.\;4.}\cdot\frac{(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-2)^2)}{5.\;6\;\ldots(4s-1)\;(4s)}a^{4s}$ etc. ſo iſt

$$\cos n\alpha = 1-\frac{n^2}{2}e^2(1+e^2)^{-1}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\;3.\;4.}e^4(1+e^2)^{-2}-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}e^6(1+e^2)^{-3}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}\cdot\frac{(n^2-6^2)}{7.\;8}e^8(1+e^2)^{-4}-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}\cdot\frac{(n^2-8^2)}{9.\;8}e^8(1+e^2)^{-5}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-8^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;9.\;10}e^{10}(1+e^2)^{-6}\;\&c.-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-4)^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;[4s-3][4s-2]}e^{4s-2}(1+e^2)^{-2s+1}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-2)^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;(4s-1)\;4s}e^{4s}(1+e^2)^{-2s}\;\&c.;$$

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\alpha=(1+e^2)^{\frac{n}{2}}-\frac{n^2}{2}e^2(1+e^2)^{\frac{n-2}{2}}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\;3.\;4}e^4(1+e^2)^{\frac{n-4}{2}}-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6}e^6(1+e^2)^{\frac{n-6}{2}}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6.\;7.\;8}e^8(1+e^2)^{\frac{n-8}{2}}-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{2.\;3.\;4\;5.\;6.\;7.\;8.\;9.\;8}e^8(1+e^2)^{\frac{n-8}{2}}+\frac{n^2}{2}\cdot\frac{(n^2-2^2)(n6-4^2)\ldots(n^2-8^2)}{3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;9\;\;10}e^{10}(1+e^2)^{\frac{n-10}{2}}\;\&c.-\frac{n^2}{2}\cdot\frac{(n^2-2^2)\;(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-4)^2)}{3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;(4s-3)(4s-2)}e^{4s-2}(1+e^2)^{\frac{n-4s+2}{2}}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4s-2)^2)}{2.\;3.\;4.\;5.\;6\;\ldots\;(4s-1)\;(4s)}e^{4s}(1+e^2)^{\frac{n-4s}{2}}\;\&c.$$

98) Wenn nun in der Binominalformel $(a+b)^m$, $a=1$, $b=e^2$ und m nach und nach $\frac{n}{2}$, $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-4}{2}$, &c. $\frac{n-4s+2}{2}$, $\frac{n-4s}{2}$ u. ſ. w. wird

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\alpha = 1+\frac{n}{2}e^2+\frac{n(n-2)}{2.\;4}e^4+\frac{n(n-2)(n-4)}{2.\;4.\;6}e^6$$

+

$$+\frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 4.\ 6.\ 8}e^{8}+\frac{n(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}e$$

$$+\frac{n(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{2.\ 4.\ 6\ \ldots\ 10}e^{10}+\&c.-\Big[\frac{n^2}{2}e^2+\frac{n^2(n^2-2)}{2.\ 2}e^4$$

$$+\frac{n^2(n-2)(n-4)}{2.\ 2.\ 4}e^6+\frac{n^2(n-2)(n-4)(n-6)}{2.\ 2.\ 4.\ 7}e^8+\frac{n^2(n-2)}{2.\ 2}.$$

$$\frac{(n-4)(n-6)(n-8)}{4.\ 6.\ 8}e^{\varepsilon}+\frac{n^2(n-2)(n-4)\ldots(n-\varepsilon)}{2.\ 2.\ 4.\ \ldots\ \varepsilon}e^{10}\ \&c.\Big].$$

$$+\Big[\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}e^4+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4.}\frac{(n-4)}{2}e^6+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n-4)(n-6)}{2.\ 4}e^8+\frac{n^2(n^2-2^2)(n-4)(n-6)(n-8)}{2.\ 3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6}e^{\varepsilon}+\frac{n^2}{2}.$$

$$\frac{(n^2-2^2\ (n-4)(n-6)(n-8)(n-\varepsilon)}{3.\ 4.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}e^{10}\ \&c.\Big]-\Big[\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n^2-4^2)}{5.\ 6}e^6+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n-6)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 2}e^8+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n^2-4^2)(n-6)(n-8)}{5.\ 6.\ 2.\ 4}e^{\varepsilon}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n-6)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 2}.$$

$$\frac{(n-8)(n-\varepsilon)}{4.\ 6}e^{10}\ \&c.\Big]+\Big[\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}e^8$$

$$+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2+9^2)(n-8)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 2}e^{\varepsilon}+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}.$$

$$\frac{(n^2-6^2)(n-8)(n-\varepsilon)}{5.\ 6.\ 2.\ 4}e^{10}\ \&c.\Big]-\Big[\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}.$$

$$\frac{(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{7.\ 8.\ 9.\ \varepsilon}e^{\varepsilon}+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-8^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ 9.\ \varepsilon}.$$

$$\frac{(n-\varepsilon)}{2.}e^{10}\ \&c.\Big]+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ \ldots\ (n^2-\varepsilon^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ \ldots\ 9.\ 10}e^{10}\ \&c.$$

$$(1+e^2)^{\frac{n}{2}}\cos n\alpha=1-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}e^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}.$$

$$\frac{(n-3)}{4}e^4-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6}e^6+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{1.\ 2.\ 3\ \ldots}$$

$$\frac{(n-7)}{8}e^8-\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \varepsilon}e^{\varepsilon}+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{1.\ 2.\ 3\ \ldots}$$

(n-ε)

$$\frac{(n-9)}{10}e^{10} \ldots\ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots(4s-2)}e^{4s-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s)}e^{4s}\ \&c.$$

$$\cos n\alpha = (1+e^2)^{-\frac{n}{2}}\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e^4 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 6}e^6 + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-7)}{1.\ 2.\ 2.\ \ldots\ldots 8}e^8 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ \varepsilon}e^{\varepsilon} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-9)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 10}e^{10} \ldots\ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (4s-2)}e^{4s-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (4s)}e^{4s}\ \&c.\Big]$$

90) Und da quersin $n\alpha = 1 - \cos n\alpha$ auch quercos $n\alpha = 1 - \sin n\alpha$, ſo iſt quersin $n\alpha = 1\ (1+e^2)^{-\frac{n}{2}}\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e^4 - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6}e^6\ \&c. - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s-3)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s-2)}e^{4s-2} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-4s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots(4s)}e^{4s}\ \text{etc}\Big]$

$$\text{quercos}\, n\alpha = 1-(1+e^2)^{-\frac{n}{2}}\Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}e^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}e^5\ \text{etc}\ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ (4s-1)}e^{4s-1} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots(4s+1)}e^{4s+1}\ \text{etc.}$$

91) Die Tangente und Cotangente, Sekante und Coſekante des nfachen Bogens α aus der Tangente e des einfachen Bogens α zu finden. Da $\tan n\alpha = \sin n\alpha.(\cos n\alpha)^{-1}$; auch $\cot n\alpha = (\tan n\alpha)^{-1} = \cos n\alpha(\sin n\alpha)^{-1}$ ferner $\sec \alpha = (\cos n\alpha)^{-1}$ und $\operatorname{cosec} n\alpha = (\sin n\alpha)^{-1}$ ſo iſt

tang

$$\text{tang}\, n\alpha = (1+e^2)^{-\frac{n}{2}}\Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3.}e^3 + \frac{n(n-1)\ldots}{1.\;2\;\ldots}\cdot\frac{(n-4)}{5}e^5 \ldots - \frac{n(n-1)\ldots}{1.\;2\;\ldots}\frac{(n-4s+2)}{(4s-1)}e^{4s-1} + \frac{n(n-1)\ldots}{1.\;2}\cdot\frac{(n-4s)}{(4s+1)}e^{4s+1}\ \&c.\Big] \times (1+e^2)^{\frac{n}{2}}\Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\;2}e^2 + \frac{n(n-1)}{1.\;2.}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{3.\;4}e^4 - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\;2.\;\ldots\;6}e^6 \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3.}\cdot\frac{\ldots(n-4s+3)}{\ldots(4s-2)}e^{4s-2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)}{1.\;2.\;\ldots\;4s}e^{4s}\ \&c.\Big]^{-1}$$

$$\text{tang}\, n\alpha = \Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}e^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\;2\ldots 5}e^5 - + \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+2)}{1.\;2.\;3\;\ldots\;(4s-1)}e^{4s-1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s)}{1.\;2\;\ldots\;(4s+1)}e^{4s+1}\ \&c.\Big] \times \Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\;2}e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}e^4 - \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)\ldots(n-5)}{2\ldots 6}e^6 + - \ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1.\;2.\;\ldots(4s-2)}e^{4s-2} + \frac{n}{1}\cdot\frac{(n-1)\ldots(n-4s+1)}{2\;\ldots\;(4s)}e^{4s}\ \text{etc.}\Big]^{-1}$$

Folglich

$$\text{cotang}\, n\alpha = (\text{tang}\, n\alpha)^{-1} = \Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\;2}e^2 + \frac{n(n-1)}{1.\;2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{3.\;4}e^4 - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\;2.\;\ldots\;6}e^6 + - \ldots - \frac{n(n-1)}{1.\;2}\cdot\frac{(n-2)\ldots(n-4s+3)}{3.\;\ldots\;(4s-2)}e^{4s-2} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+1)}{1.\;2.\;3\;\ldots\;(4s)}\cdot e^{4s}\ \&c.\Big] \times \Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\;2.\;3}e^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\;2.\;\ldots\;5}e^5 \ldots - \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-4s+2)}{1.\;2.\;3\;\ldots\;(4s-1)}e^{4s+1} + \frac{n(n-1)}{1.\;2}\cdot\frac{(n-2)\ldots(n-4s)}{3\;\ldots\;(4s+1)}e^{4s+1}\ \&c.\Big]^{-1}$$

$\text{ſec}\, n\alpha = (\cos n\alpha)^{-1}$; $\text{coſec}\, n\alpha = (\text{ſin}\, n\alpha)^{-1}$

ε1) Setzt man in die Formel zum Finden der Tangente des Bogens $n\alpha$ aus des einfachen Bogens α Tangente e nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.; ſo erhält man die Gleichungen für die Tan-

Tangenten des 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 fachen Bogens aus des einfachen Bogens α Tangente e.

$$\tan n\alpha = \Big[ne - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}e^3 + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.\ 2\ \ldots\ 5}e^5 -+\ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+2)}{1.\ 2\ \ldots\ (4s-1)}e^{4s-1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s)}{1.\ 2\ \ldots\ (4s+1)}e^{4s+1}\ \&c.\Big] X \Big[1 - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}e^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}e^4 - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 6}e^6 +-\ldots- \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2\ \ldots\ (4s-2)}e^{4s-2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)}{1.\ 2\ \ldots\ (4s)}e^{4s}\ \&c.\Big]^{-1}.$$

$\tan 2\alpha = 2e.(1-e^2)^{-1};$

$\tan 3\alpha = (3e-e^3)(1-3e^2)^{-1};$

$\tan 4\alpha = (4e-4e^3).(1-6e+e^4)^{-1};$

$\tan 5\alpha = [5e-\varepsilon e^3+e^5].[1-\varepsilon e^2+5e^4]^{-1};$

$\tan 6\alpha = [6e-18e^3+6e^5].[1-13e^2+13e^4-e^6]^{-1};$

$\tan 7\alpha = [7e-2\varrho e^5+19e^5-e^7].[1-19e^2+2\varrho e^4-7e^6]^{-1};$

$\tan 8\alpha = [8e-48e^3+18e^5-7e^7].[1-24e^2+5\varepsilon e^4-24e^6+e^8]^{-1};$

$\tan 9\alpha = [9e-70e^3+\varepsilon 6e^5-30e^7+e^9].[1-30e^2+\varepsilon 6e^4-70e^6+9e^8]^{-1};$

ε2) Den Sinus, Coſinus &c. die Cotangente des Bogens nα aus des Bogens α Cotangente f zu finden.

Weil $f = e^{-1}$ oder $e = f^{-1}$, ſo iſt $e^3 = f^{-3}$, $e^n = f^{-n}$; mithin $(1+e^2)^{-\frac{n}{2}} = (1+f^2)^{-\frac{n}{2}}.\ f^n$.

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichungen in 9ϱ, ſo erhält man die verlangten.

$$\cos n\alpha = (1+f^2)^{-\frac{n}{2}}.\Big[f^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}f^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}f^{n-4} - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.\ 2\ \ldots\ 6.}f^{n-6} +-\ldots- \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1.\ 2.\ \ldots(4s-2)}f^{n-4s+2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)}{1.\ 2.\ \ldots\ (4s)}f^{n-4s}\ \text{etc.}\Big]$$

ſin

$$\sin n\alpha = (1+f^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot \Big[n f^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1 \cdot 2 \ldots 5} f^{n-5} -+ \ldots\ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+2)}{1 \cdot 2 \ldots (4s-1)} \cdot f^{n-4s+1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s)}{1 \cdot 2 \ldots (4s+1)} f^{n-4s-1} \;\&c. \Big]$$

secant $n\alpha = (\cos n\alpha)^{-1}$; coſec $n\alpha = (\sin n\alpha)^{-1}$;
querſin $n\alpha = 1 - \cos n\alpha$; quercos $n\alpha = 1 - \sin n\alpha$;

$$\text{tang}\, n\alpha = \Big[n f^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1 \cdot 2 \ldots 5} f^{n-5} - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+2)}{1 \cdot 2 \ldots (4s-1)} f^{n-4s+1} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s)}{1 \cdot 2 \ldots (4s+1)} f^{n-4s-1} \;\&c. \Big] \times \Big[f^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{n-4} - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1 \cdot 2 \ldots 6} f^{n-6} +-\ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1 \cdot 2 \ldots (4s-2)} f^{n-4s+2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)}{1 \cdot 2 \ldots (4s)} f^{n-4s} \;\&c. \Big]^{-1}$$

$$\text{cotang}\, n\alpha = \Big[f^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{n-4} - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1 \cdot 2 \ldots 6} f^{n-6} +-\ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+3)}{1 \cdot 2 \ldots (4s-2)} f^{n-4s+2} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4s+1)}{1 \cdot 2 \ldots (4s)} f^{n-4s} \Big] \times \Big[n f^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{n-3} + \frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1 \cdot 2 \ldots 3} f^{n-5} - \frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1 \cdot 2 \ldots 7} f^{n-7} +-\ldots - \frac{n}{1} \cdot \frac{(n-1)\ldots(n-4s+2)}{2 \ldots (4s-1)} f^{n-4s+1} + \frac{nn(-1)\ldots(n-4s)}{1 \cdot 2 \ldots (4s+1)} f^{n-4s-1} \;\text{etc.} \Big]^{-1}$$

63) Wird in dieſem Ausdrucke für die Cotangente des Bogens $n\alpha$ aus des Bogens α Cotangente f, oder in jener in (60) ſolche aus des Bogens α Tangente e zu finden, nach und nach n gleich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geſetzt; ſo erhält man die Cotangenten des 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 fachen Bogen rückſichtlich aus der Cotangente f oder Tangente e des einfachen Bogens α zu finden $(f^2-1).(2f)^{-1} = \cot 2\alpha = (1-e^2).(2e)^{-1}$; (f^3-3f):

 $(3f^2$

$(3f^2-1)^{-1} = \cot 3\alpha = (1-3e^2).(3e-e^3)^{-1}$; $(f^4-6f^2+1).(4f^3-4f)^{-1} = \cot 4\alpha = [1-6e^2+e^4].[4e-4e^3]^{-1}$; $[f^5-\varepsilon f^3+5f].[5f^4-\varepsilon f^2+1]^{-1} = \cot 5\alpha = [1-\varepsilon e^2+5e^4].[5e-\varepsilon e^3+e^5]^{-1}$; $[f^6-13f^4+13f^2-1].[6f^5-18f^3+6f]^{-1} = \cot 6\alpha = [1-13e^2+13e^4-e^6].[6e-18e^3+6e^5]^{-1}$; $[f^7-19f^5+2\varrho f^3-7f].[7f^6-2\varrho f^4+19f^2-1]^{-1} = \cot 7\alpha = [1-19e^2+2\varrho e^4-7.e^6].[7e-2\varrho e^3+19e^5-e^7]^{-1}$; $[f^8-24f^6+5\varepsilon f^4-24.f^2+1][8f^7-48f^5+18f^3-8f]^{-1} = \cot 8\alpha = [1-24e^2+5\varepsilon e^4-24e^6+e^8].[8e-48e^3+18e^5-8.e^7]^{-1}$; $[f^9-30f^7+6\varepsilon f^5-70f^3+9f].[9f^8-70f^6+\varepsilon 6f^4-30f^2+1]^{-1}$; $= \cot 9\alpha = [1-30e^2+\varepsilon 6e^4-70.e^6+9e^8].[9e-70e^3+\varepsilon 6e^5-30e^7+e^9]^{-1}$

ε4) Um die Formeln: aus der Sekante g oder Coſekante h des Bogens α, den Sinus, Coſinus &c. des Bogens $n\alpha$ zu finden, zu erhalten, braucht man nur in die oben gefundenen Gleichungen: aus dem Coſinus c oder Sinus a des Bogens α den Sinus, und Coſinus &c. des Bogens $n\alpha$ zu finden, h^{-1} Statt a, g^{-1} Statt c; folglich auch h^{-s} Statt a^s, g^{-s} Statt c^s zu ſetzen.

**) ε5) Andere bequeme oder vielmehr anſchaulichere Ausdrücke: aus dem Halbmeſſer = 1 direct die Sinuße, Coſinuße &c. der innerhalb eines Quadrant fallenden Bögen zu finden, als die obigen waren. — [illegible]

Weil vom achten Theil des Umkreißes oder von der Hälfte des Quadranten die Tangente gleich der Cotangente und folglich jede gleich dem Halbmeſſer = 1, ſo ſetze man in dieſen lezten in ε0 und ε3 ſtehenden Gleichungen $f = 1 = e$; ſo wird $\alpha = \frac{1}{2} q$ und $(1+e^2)^{-\frac{n}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}} = (1+f^2)^{-\frac{n}{2}}$; ferner ſei $\sin n\alpha = \sin \frac{n}{2} q$; $\tan n\alpha = \tan \frac{n}{2} q$ und dergl.

Wird nun $n < 1$ und $= \frac{2u}{m}$ mithin $m > 2u$, $m > u$ geſetzt ſo iſt

ſin $n\alpha = \sin \frac{u}{m} q$, tang $n\alpha = \text{tang} \frac{u}{m} q$. Alles dieſes in die ſo eben erwähnten Gleichungen geſetzt, giebt die folgenden, verlangten.

$$\sin \frac{u}{m} q = 2^{\frac{m-u}{m}} \Big[\frac{u}{m} - \frac{u(m-2u)}{1.} \frac{(2m-2u)}{2.} \frac{}{3.} m^{-3} + \frac{u(m-2u)(2m-2u)(3m-2u)(4m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} m^{-5} - \frac{u(m-2u)}{1.\ 2.} \cdot \frac{(2m-2u)\ldots(6m-2u)}{3\ \ldots\ 7} m^{-7} + - \ldots\ldots - \frac{u(m-2u)}{1.\ 2.} \cdot \frac{(2m-2u)\ldots(m(4s-2)-2u)}{3\ \ldots\ (4s-1)} m^{-4s+1} + \frac{u(m-2u)(2m-2u)}{1.\ 2.\ 3.} \cdot \frac{\ldots(m(4s)-2u)}{\ldots\ (4s+1)} m^{-4s-1}\ \&c. \Big]$$

$$\cos \frac{u}{m} q = 2^{\frac{m-u}{m}} \Big[\tfrac{1}{2} + \frac{u(m-2u)}{1.\ 2} m^{-2} + \frac{u(m-2u)}{1.\ 2.} \cdot \frac{(2m-2u)(3m-2u)}{3.\ 4.} m^{-4} + \frac{u(m-2u)(2m-2u)\ldots(5m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 6} \cdot m^{-6} + \ldots + \frac{u(m-2u)(2m-2u)(\ldots(m(4s-3)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (4s-2)} m^{-4s+2} + \frac{u(m-2u)(2m-2u)\ldots(m(4s-1)-2u)}{1\ 2.\ 3.\ \ldots\ (4s)} m^{-4s}\ \&c. \Big]$$

$\text{coſec:} \frac{u}{m} q = (\sin \frac{u}{m} q)^{-1}$, ſecant $\frac{u}{m} q = (\cos. \frac{u}{m} q)^{-1}$;

querſin: $\frac{u}{m} q = 1 - \cos: \frac{u}{m} q$; quercos: $\frac{u}{m} q = 1 - \sin \frac{u}{m} q$;

$$\text{tang} \frac{u}{m} q = \Big[2u.m^{-1} - \frac{2u(m-2u)}{1.} \frac{(2m-2u)}{2.} \frac{}{3} m^{-3} + \frac{2u(m-2u)(2m-2u)(3m-2u)(4m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} m^{-5} - + \ldots; - \frac{2u(m-2u)(2m-2u)\ldots(m(4s-2)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (4s-1)} m^{-4s+1}$$

$$+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(m(4s)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (4s+1)}m^{-4s-1}\ \text{etc.}\Big]\times$$

$$\Big[1+\frac{2u(m-2u)}{1.\ 2}m^{-2}+\frac{2u(m-2n)(2m-2u)(3m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}m^{-4}$$

$$+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(5m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ 6}m^{-6}++\dots$$

$$+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(m(4s-3)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (4s-2)}m^{-4s+2}$$

$$+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(m(4s-1)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (4s)}m^{-4s}\ \&c.\Big]^{-1}$$

Und

$$\text{Cotang}\ \frac{u}{m}q=\Big[1+\frac{2u(m-2u)}{1.\ 2}m^{-2}+\frac{2u(m-2u)}{1.\ 2}\cdot$$

$$\frac{(2m-2u)(3m-2u)}{3.\ 4.}m^{-4}+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots}{1.\ 2.\ 3.\ \dots}\cdot$$

$$\frac{(5m-2u)}{6}m^{-6}+\dots+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots}{1.\ 2.\ 3.\ \dots}\cdot$$

$$\frac{(m(4s-3)-2u)}{(4s-2)}m^{-4s+2}+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots}{1.\ 2.\ 3.\ \dots}\cdot$$

$$\frac{(m(4s-1)-2u)}{(4s)}m^{-4s}\Big]\times\Big[2u.m^{-2}-\frac{2u(m-2u)(2m-2u)}{1.\ 2.\ 3.}\cdot$$

$$m^{-3}+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)(3m-2u)(4m-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}m^{-5}$$

$$-+\dots-\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(m(4s-2)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (4s-\ )}\cdot$$

$$m^{-4s+1}+\frac{2u(m-2u)(2m-2u)\dots(m(4s)-2u)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ (4s+1)}\cdot$$

$$m^{-4s-1}\ \text{etc.}\Big]^{-1}$$

Anhang.

A) Wenn in den drei GrundFormeln: den Sinus des nfachen Bogens aus des einfachen Bogens α Sinus a, oder Querſinus b, oder Tangente e zu finden; n ſein Kleinſtes erreicht, d. i. wenn $n = \frac{1}{\infty}$ wird; ſo gehen hinwiederum aus dieſen drei GrundFormeln, die drei GrundFormeln: den einfachen Bogen α entweder aus ſeinem Sinus a, oder aus ſeinem Querſinus b, oder aus ſeiner Tangente e zu finden; hervor.

B) Wenn in den drei GrundFormeln: aus des einfachen Bogens Sinus a den Sinus, Querſinus und die Tangente des nfachen Bogens zu finden: n ſein Größtes erreicht, d. i. wenn $n = \infty = \frac{1}{0}$ wird, ſo gehen hinwiederum aus dieſen drei GrundFormeln, die drei GrundFormeln: den Sinus, Querſinus und die Tangente eines Bogens β aus dieſen Bogen β zu finden: hervor

Aa)

1) Die Formel: den Bogen α aus ſeinem Sinus a zu finden: aus der GrundFormel: des nfachen Bogens Sinus aus des einfachen Bogen Sinus a zu finden; abzuleiten.

Wenn $n<1$ ſo iſt nach (68) dieſe letzte Formel.

$$\sin n\alpha = n. \left[a + \frac{(1^2-n^2)}{2.\ 3}a^3 + \frac{(1^2-n^2)(3^2-n^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5 + \frac{(1^2-n^2)}{2.\ 3}.\frac{(3^2-n^2)(5^2-n^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7 + \frac{(1^2-n^2)(3^2-n^2)(5^2-n^2)(7^2-n^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9 \right.$$

$+$

$$+\frac{(1^2-n^2)(3^2-n^2)\ldots(9^2-n^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots\varepsilon.\ \varrho}a^{\varrho}\ldots+\frac{(1^2-n^2)(3^2-n^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}.\frac{\ldots((2r-1)^2-n^2)}{\ldots\ 2r.\ (2r+1)}a^{2r+1}\ \&c.]$$

Erreicht nun n ſein Kleinſtes, d. i. wird $n=0$ ſo wird aus dieſer Formel die folgende

$$\sin\frac{1}{\infty}\alpha=\sin 0.\alpha=0.[a+\frac{1^2}{2.3}a^3+\frac{1^2.3^2}{2.3.4.5}a^5+\frac{1^2.3^2.5^2}{2.3.4.5.6.7}a^7+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2.3.4.5.6.7.8.9.\varepsilon.\varrho}a^{\varrho}\ldots+\frac{1^2.3^2.5^2}{2.3.4.5.6.7}.\frac{\ldots(2r-1)^2}{\ldots 2r.(2r+1)}a^{2r+1}\ \&c.]$$

Es fällt nämlich in den CoefficientenFactoren n^2 überall weg, da es $=0^2$ iſt, und es bleiben darin nur die verſchiedenen $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, \varrho^2\ldots(2r-1)^2, (2r+1)^2$ &c.

Wenn aber der Sinus eines Bogens gleich 0 wird, ſo wird auch dieſer Bogen ſelbſt zu 0, und es läßt ſich dann der Bogen Statt ſeines Sinus ſetzen, ja dieſer gehet gleichſam in jenen über, oder $\sin 0.\alpha=0.\alpha$ oder $\sin\frac{\alpha}{\infty}=\frac{\alpha}{\infty}$. Wird nun dieſer Werth von $\sin 0.\alpha$ oder $\sin\frac{\alpha}{\infty}$ in die eben erhaltene Formel geſetzt, ſo gehet die folgende hervor.

$$\frac{\alpha}{\infty}=0.[a+\frac{1.1}{2.3}a^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}a^7+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}.\frac{5.5.7.7}{6.7.8.9}a^9+\frac{1.1.3.3\ldots9.9}{2.3.4.5\ldots\varepsilon.\varrho}a^{\varrho}\ldots+\frac{1.1.3.3\ldots(2r-1)(2r-1)}{2.3.4.5\ldots\ 2r.\ (2r+1)}a^{2r+1}\ \&c.]$$

Wird nun zu beiden Seiten der Gleichung mit 0 dividirt, oder mit ∞ multiplicirt, ſo erhält man:

$$\alpha=a+\frac{1.1}{2.3}a^3+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}a^5+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7.}a^7+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}a^9$$

+

$$+\frac{1.1.3.3\ldots9.9}{2.3.4.5\ldots\varepsilon.ϙ}a^{ϙ}\ldots+\frac{1.1.3.3\ldots(2r-1)(2r-1)}{2.3.4.5\ldots\quad 2r\quad(2r+1)}a^{2r+1}\quad\&c.$$

Gerade die nämliche bekannte Formel, die wir weiter oben auch fanden.

2) Die Formel: den Bogen aus ſeinem Querſinus b zu finden, aus der Formel: den Sinus des nfachen Bogens aus des einfachen Bogens Querſinus b zu finden: abzuleiten.

Wenn $n < 1$ ſo iſt nach (89) die letzte Formel:

$$\sin n\alpha = 2n.\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{(1^2-2^2n^2)}{2.\quad 3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{(1^2-2^2n^2)}{2.\quad 3}.\frac{(3^2-2^2n^2)}{4.\quad 5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{(1^2-2^2n^2)(3^2-2^2n^2)(5^2-2^2n^2)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7}.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{(1^2-2^2n^2)(3^2-2^2n^2)(5^2-2^2n^2)(7^2-2^2n^2)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\quad 7.\quad 8.\quad 9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}$$

$$+\frac{(1^2-2^2n^2)(3^2-2^2n^2)\ldots(9^2-2^2n^2)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5\ \ldots\ \varepsilon.\quad ϙ}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{ϙ}{2}}\ldots\ldots$$

$$+\frac{(1^2-2^2n^2)(3^2-2^2n^2)\ldots((2r-1)^2-2^2n^2)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5\ \ldots\quad 2r.\quad (2r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+1}\ \&c.\Big]$$

Wird nun $n = \frac{1}{\infty} = 0$, d. i. erreicht es ſein Kleinſtes, ſo geht dieſe Formel in die folgende über.

$$\sin\frac{\alpha}{\infty}=\frac{2}{\infty}.\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}.\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}}+\frac{1.1.3.3\ldots9.9}{2.3.4.5\ldots\varepsilon.ϙ}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{ϙ}{2}}\ldots$$

$$+\frac{1.1.3.3\ldots9.9\ldots(2r-1)(2r-1)}{2.3.4.5\ldots\varepsilon.ϙ\ldots\ 2r.\quad(2r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+1}\ldots\ \&c.\Big]$$ Oder

da der Sinus eines nfachen Bogen gleich dem Bogen $n\alpha$ wird, wenn $n = \frac{1}{\infty} = 0$ wird, ſo läßt ſich dieſer Bogen $\frac{\alpha}{\infty}$ Statt des $\sin\frac{\alpha}{\infty}$ ſetzen und dann erhält man aus der letzten Formel folgende

$$\frac{\alpha}{\infty} = \frac{2}{\infty}\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} + \frac{1.1.3.3...9.9}{2.3.4.5...\varepsilon.\varrho}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}} .... + \frac{1.1.3.3....9.9...}{2.3.4.5....\varepsilon.\varrho...}.$$
$$\frac{(2r-1)(2r-1)}{2r(2r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+1} \&c.\Big]$$

oder wenn man zu beiden Seiten der Gleichunn! mit ∞ multiplicirt

$$\alpha = 2\Big[\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1.1}{2.3}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1.1.3.3}{2.3.4.5}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{9}{2}} + \frac{1.1.3.3....9.9}{2.3.4.5....\varepsilon.\varrho}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}} .... + \frac{1.1.3.3....}{2.3.4.5....}.$$
$$\frac{(2r-1)\,(2r-1)}{2r.\,(2r+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{2r+1} \&c.\Big]$$

Ebenfalls wieder die nämliche Formel, die ſich weiter oben ergab.

3) Die Formel: Den Bogen aus ſeiner Tangente e zu finden: aus der Formel: den Sinus des nfachen Bogens aus des einfachen Bogens Tangente e zu finden: abzuleiten.

Die lezte Formel iſt, wenn n kleiner als 1 iſt

$$\text{ſin}\; n\alpha = (1-e^2)^{-\frac{n}{2}}\, n.\Big[e - \frac{(1-n)(2-n)}{2.\;\;3}e^3 + \frac{(1-n)\,(2-n)}{2\;\;\;3}.$$
$$\frac{(3-n)(4-n)}{4\;\;\;5}e^5 - \frac{(1-n)\,(2-n)\,...\,(6-n)}{2\;\;\;3\;\;...\;\;7}e^7 + \frac{(1-n)\,(2-n)....}{2.\;\;\;3\;\;....}$$
$$\frac{(8-n)}{9}e^9 - \frac{(1-n)\,(2-n)...(\varepsilon-n)}{2.\;\;\;3.\;....\;\;\varrho}e^{\varrho}.... - \frac{(1-n)\,(2-n)....}{2.\;\;\;3\;\;....}$$
$$\frac{((4r-2)-n)}{(4r-1)}e^{4r-1} + \frac{(1-n)\,(2-n)...(4r-n)}{2.\;\;\;3\;\;...\;(4r+1)}e^{4r+1}\;\text{etc.}\Big]$$

Jezt erreicht n ſein Kleinſtes und wird $0 = \frac{1}{\infty}$. Dann verſchwindet in dieſer lezten Gleichung in den CoefficientenFactoren n und folgende Gleichung geht hervor

$$\text{ſin}\,\frac{\alpha}{\infty} = (1-e^2)^{-\frac{0}{2}} \cdot \frac{1}{\infty}.\Big[e - \frac{1.2}{2.3}e^3 + \frac{1.2.3.4}{2.3.4.5}e^5 - \frac{1.2.3.4.5.6}{2.3.4.5.6.7}e^7$$

+

$$+\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2.3.4.5.6.7.8.9}e^9-\frac{1.2.3\ldots\varepsilon}{2.3.4\ldots\varrho}e^\varrho\ldots-\frac{1.2.3\ldots(4r-2)}{2.3.4\ldots(4r-1)}e^{4r-1}$$

$$+\frac{1.2.3\ldots 4r}{2.3.4\ldots(4r+1)}e^{4r+1}\text{etc.}]$$ und da $((1-e^2)^{-\frac{1}{2}})^0=1^{-1}$ ſo iſt

auch $\sin\frac{\alpha}{\infty}=\frac{1}{\infty}\left[e-\frac{e^3}{3}+\frac{e^5}{5}-\frac{e^7}{7}+\frac{e^9}{9}-\frac{e^\varrho}{\varrho}\ldots-\frac{e^{4r-1}}{(4r-1)}\right.$

$\left.+\frac{e^{4r+1}}{(4r+1)}\text{etc.}\right]$

Und da mehr erwähnter Maſſen, wenn der Sinus eines Bogens o wird, auch dieſer zugleich o iſt, und erſterer in leztern überſchreitet, ſo läßt ſich $\frac{\alpha}{\infty}$ Statt $\sin\frac{\alpha}{\infty}$ in die vorhergehende Gleichung ſetzen und dann mit ∞ laſſen ſich beide Glieder multipliciren, wo dann die verlangte Gleichung hervorgeht.

$$\frac{\alpha}{\infty}=\frac{1}{\infty}\left[e-\frac{e^3}{3}+\frac{e^5}{5}-\frac{e^7}{7}+\frac{e^9}{9}-\frac{e^\varrho}{\varrho}\ldots-\frac{e^{4r-1}}{(4r+1)}+\frac{e^{4r+1}}{(4r+1)}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{4r+3}}{(4r+1)}\text{etc.}\right]$$

$$\alpha=e-\frac{e^3}{3}+\frac{e^5}{5}-\frac{e^7}{7}+\frac{e^9}{9}-\frac{e^\varrho}{\varrho}\ldots-\frac{e^{4r-1}}{(4r-1)}+\frac{e^{(4r+1)}}{(4r+1)}\text{ etc.}$$

Bb

1) Die Formel: den Sinus aus ſeinem Bogen β zu finden: aus der Formel: des n fachen Bogens Sinus aus des einfachen Bogens Sinus a zu finden: zu entwickeln.

Wenn n > 1 ſo iſt die letzte Formel

$$\sin n\alpha=n.[a-\frac{(n^2-1^2)}{2.\quad 3}a^3+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5}a^5-\frac{(n^2-1^2)}{2.\ 3}\cdot$$
$$\frac{(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{4.\ 5.\ 6.\ 7}a^7+\frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)(n^2-7^2)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}a^9$$

—

$$- \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-9^2)}{2.\;3\;4.\;5\ldots 8.\;9} a^9 \ldots - \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.\;3.\;4.\;5}$$
$$\frac{\ldots(n^2-(4r-3)^2)}{\ldots(4r-2)(4r-1)} a^{4r-1} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots(n^2-(4r-1)^2)}{2.\;3.\;4.\;5\ldots(4r-2)(4r-1)} a^{4r+1} \text{ etc.}].$$

Jetzt erreicht n ſein Größtes, d. i. es wird $n = \frac{1}{0} = \infty$, ſo ſind in den Coefficienten-Factoren die Zahlen $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 9^2$, etc. $(4r-3)^2$, $(4r-1)^2$ in Vergleich auf $n = \infty$ alle gleich 0; oder man kann n anſehen als $= \frac{1}{0}$, ſo iſt

$$n^2-1^2 = \frac{1^2-0^2.1^2}{0^2},\; n^2-3^2 = \frac{1^2-0^2.3^2}{0^2},\; n^2-5^2 = \frac{1^2-0^2.5^2}{0^2}$$
$$(n^2-7^2) = \frac{1^2-0^2.7^2}{0^2},\; n^2-9^2 = \frac{1^2-0^2.9^2}{0^2},\; (n^2-(4r-1)^2)$$
$$= \frac{1^2-0^2.(4r-1)^2}{0^2}$$ mithin ſind alle als $= \frac{1^2}{0^2} = \infty^2$ anzuſehen.

Dann geht folgende Gleichung hervor

$$\sin\frac{\alpha}{\infty} = \frac{a}{0} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{a}{0}\right)^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\left(\frac{a}{0}\right)^5 + \frac{1}{2.3\ldots7}\left(\frac{a}{0}\right)^7$$
$$+ \frac{1}{2.3\ldots9}\left(\frac{a}{0}\right)^9 - \frac{1}{2.3\ldots8.9}\left(\frac{a}{0}\right)^9 \ldots - \frac{1}{2.3\ldots(4r-1)}\left(\frac{a}{0}\right)^{4r-1}$$
$$+ \frac{1}{2.3\ldots(4r+1)}\left(\frac{a}{0}\right)^{4r+1} \;\&c.$$

Jetzt läßt ſich annehmen, daß der Bogen α unendlich klein, oder das Kleinſte vom Bogen β wäre, d. i daß $\alpha = \frac{\beta}{\infty} = 0$ denn wie könnte ſonſt der Sinus vom Größten des Bogens α verlangt werden. Alsdann iſt a der Sinus vom Bogen $\frac{\beta}{\infty} = 0$, und folglich gleich dieſem zu ſetzen. Geſchieht dieſes, ſo erhält man folgende Formel

$$\sin\frac{\alpha}{0} = \sin\frac{\beta}{\infty.0} = \frac{\beta}{\infty.0} - \frac{\infty^3}{2.3}.\frac{\beta^3}{\infty^3} + \frac{\beta^5}{2.3.4.5}.\frac{\infty^5}{\infty^5}$$

—

$$-\frac{\beta^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6.7}\cdot\frac{\infty^7}{\infty^7}+\frac{\beta^9}{2\cdot3\cdot4\ldots9}\cdot\frac{\infty^9}{\infty^9}-\frac{\beta^\varrho}{2\cdot3\cdot4\ldots\varrho}\cdot\frac{\infty^\varrho}{\infty^\varrho}\ldots$$

$$-\frac{\beta^{4r-1}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots(4r-1)}\cdot\frac{\infty^{4r-1}}{\infty^{4r-1}}+\frac{\beta^{4r+1}}{2\cdot3\cdot4\ldots(4r+1)}\cdot\frac{\infty^{4r+1}}{\infty^{4r+1}}\text{ etc.}$$

Mithin

$$\sin\beta=\beta-\frac{\beta^3}{2\cdot3}+\frac{\beta^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{\beta^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\frac{\beta^9}{2\cdot3\ldots9}-\frac{\beta^\varrho}{2\cdot3\ldots\varrho}$$
$$-\frac{\beta^{4r-1}}{2\cdot3\ldots(4r-1)}+\frac{\beta^{4r+1}}{2\cdot3\ldots(4r+1)}\text{ etc.}$$

welches die geſuchte Formel iſt.

2) Die Formel: den Querſinus aus ſeinem Bogen β zu finden: aus der Formel: des $n$fachen Bogens Querſinus aus des einfachen Bogens Sinus a zu finden: zu entwickeln. Laut oben iſt die letzte Formel folgende.

$$\text{querſin } n|\alpha=\frac{n^2}{2}a^2-\frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot3\cdot4}a^4+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}a^6$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\cdot a^8+\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot$$
$$\frac{(n^2-6^2)(n^2-8^2)}{7\cdot8\cdot9\cdot\varepsilon}\cdot a^\varepsilon-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots n^2-\varepsilon^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\ldots\varrho\cdot10}a^{10}\ldots$$
$$-\frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4r-4)^2)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\ldots(4r-3)(4r-2)}a^{4r-2}-\frac{n^2(n^2-2^2)}{2\cdot3\cdot4}\cdot$$
$$\frac{(n^2-4^2)\ldots(n^2-(4r-2)^2)}{5\cdot6\ldots(4r-1)\cdot4r}a^{4r}\text{ etc. wenn } n>1 \text{ iſt.}$$

Erreicht in dieſer Formel n ſein Größtes, d. i. wird $n=\infty=\frac{1}{0}$, ſo ſind, in Beziehung auf dieſen Werth, alle negativen Zahlen in alle den Factoren der verſchiedenen Coefficienten als 0 anzuſehen, und alsdann geht die folgende Gleichung hervor.

$$\text{querſin}\, n\alpha = \text{querſin}\, \infty . \alpha = \frac{\infty^2 . a^2}{2} - \frac{\infty^4 . a^4}{2.3.4} + \frac{\infty^6 . a^6}{2.3.4.5\,6.}$$

$$- \frac{\infty^8 . a^8}{2.3\ldots8} + \frac{\infty^\varepsilon . a^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\infty^{10} . a^{10}}{2.3\ldots10} \ldots + \frac{\infty^{4r-2} . a^{4r-2}}{2.3.4\ldots(4r-2)}$$

$$- \frac{\infty^{4r} . a^{4r}}{2.3.4\ldots4r} \text{ etc.}$$

Nun läßt ſich aber nicht leicht einſehen, wie ein Bogen unendlich wachſen könne, wenn er nicht unendlich klein iſt, da aber nichts niemals wachſen kann, und aus nichts niemals etwas wird; ſo iſt anzunehmen, daß α der unendlich Mal verringerte Theil eines Bogens β ſei, der alsdann auch hinwiederum unendlich Mal vergrößert werden kann, wenn er unendlich Mal verringert worden war. Mit einem Worte, es iſt anzunehmen, daß $\alpha = \frac{\beta}{\infty}$ dann iſt aber der Sinus von α der $\sin \alpha = \sin \frac{\beta}{\infty} = 0$, folglich auch $= \frac{\beta}{\infty}$ zu ſetzen, und dann wird aus der eben erhaltenen Gleichung die folgende

$$\text{querſin}\, \infty . \alpha = \text{querſin}\, \infty . \frac{\beta}{\infty} = \text{querſin}\, \beta$$

$$\text{querſin}\, \beta = \frac{\infty^2 \beta^2}{2 . \infty^2} - \frac{\beta^4}{2.3.4} . \frac{\infty^4}{\infty^4} + \frac{\beta^6}{2.3.4.5.6} . \frac{\infty^6}{\infty^6} - \frac{\beta^8}{2.3\ldots8} .$$

$$\frac{\infty^8}{\infty^8} + \frac{\beta^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon} . \frac{\infty^8}{\infty^8} - \frac{\beta^{10}}{2.3.4\ldots10} . \frac{\infty^{10}}{\infty^{10}} \ldots + \frac{\beta^{2r-2}}{2.3\ldots(2r-2)} .$$

$$\frac{\infty^{4r-2}}{\infty^{4r-2}} - \frac{\beta^{4r}}{2.3\ldots4r} . \frac{\infty^{4r}}{\infty^{4r}} \text{ etc.}$$ Alſo

$$\text{querſin}\, \beta = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{2.3.4} + \frac{\beta^6}{2.3\ldots6} - \frac{\beta^8}{2.3\ldots8} + \frac{\beta^\varepsilon}{2.3\ldots\varepsilon} - \frac{\beta^{10}}{2.3.4\ldots10}$$

$$\ldots + \frac{\beta^{4r-2}}{2.3.4\ldots(4r-2)} - \frac{\beta^{4r}}{2.3\ldots4r} \text{ etc.}$$

Das was verlangt wurde.

3) Die

3) Die Formeln: den Coſinus, Quercoſinus, die Tangente, Cotangente, Sekante und Coſekante, aus dem dazu gehörigen Bogen β zu finden; aus den Formeln: des nfachen Bogens α Coſinus, Quercoſinus, Tangente, Cotangente, Sekante, Coſekante aus des einfachen Bogens Sinus a zu finden: abzuleiten.

Da dieſe Linien Producte und Quotienten aus den beiden GrundLinien, dem Sinus und Querſinus ſind oder ſich ſehr leicht daraus ableiten laſſen; ſo ſind auch die erſten 6 Formeln aus den leztern ſechs Formeln bereits durch die Ableitungen der beiden vorhergehenden Formeln (in 1, und 2 Bb) abgeleitet oder entwickelt, und es bedarf für Kenner keiner weitern beſondern Ableitung oder Entwickelung.

Schlüßlich denn noch nachfolgende überſichtliche Bemerkung über den Gang der Ableitung und Entwickelung der Formeln in dieſer Schrift.

Zuvörderſt leiteten wir einige beſondere Formeln für beſondere Fälle und Geſetze aus unumſtößlichen und bewießenen GrundSätzen ab. Wir ſuchten das Geſetz der Fortſchreitung der Potenzen an dieſen beſondern Formeln auf; wir erwießen, daß, da ſich eine ſolche tranſcendentale Gröſſe, wie Sinus und Bogen zu einander ſind, nur gegenſeitig ſich in Functionen der andern, welche aus unendlichen Reihen beſtehen, beſtimmen und meſſen läſt, die Potenzen in jeder von dieſen unendlichen Reihen nach derſelben Differenz und nach demſelben Geſetze fortſchreiten müßten. Wir ſetzten daher zwei unbeſtimmte unendliche Reihen, worin die Potenzen nach dem nämlichen Geſetze fortſchritten; wir zeugten, wenn dieſe Reihe allgemein gelte, ſo gelte auch eine andere ähnliche: wir wanden dann die unumſtößlichen und bewießenen GrundSätze darauf an und fanden dann dadurch die bekannten unendlichen Reihen, die geraden trigonometriſchen Linien aus ihrem zugehörigen Bogen und dieſen hinwiederum aus ihnen zu finden. Wir verbanden dann die beiden ein Mal ſo zu nennenden antithetiſchen Reihen zu einer Syntheſis und erhielten zu unſrer Verwunderung und Freude die allgemeinen Formeln

für

für jeden der möglichen beſonderen Fälle, worinn auch jene zuerſt angewandten beſonderen Ausdrücke lagen. Wir leiteten aus dieſen allgemeinen Formeln auch ganz neue, zeither noch nicht bekannte, ſehr leichte, ſehr bequeme und mehr die Arbeit ſichernde Ausdrücke und Formeln ab, und zeigten ihren weit ausgebreiteten Nutzen. Endlich entwickelten wir zuletzt durch das Setzen eines Größten und Kleinſten, hinwiederum die antithetiſchen Formeln aus den ſynthetiſchen. Dieſe Uebereinſtimmung in den Reſultaten und im Ganzen iſt der größte Beweiß der alleinigen Richtigkeit unſeres Verfahrens vor allen andern nnd der Erſchöpfung dieſes höchſt wichtigen Gegenſtandes. Welches Verfahren und welcher Gang den ſo ſchön geſchürzten mathematiſchen Knoten nicht gewaltſam, wie zeither auf gut alexandriniſch zerhauete, ſondern ihn in der größten Harmonie auflößte. — Möchte man doch mit allen geſchürzten wiſſenſchaftlichen Knoten bei ihrer Löſung ſo verfahren, wie bei dieſem geſchehen! und — es wird ſich überall die größte Harmonie zeigen und ergeben. —

Sollte dieſe wiſſenſchaftliche Erfindung d. i. dieſe ſo Gehaltvolle rein wiſſenſchaftliche Ableitung ꝛc. außer einer behenden gerechten Würdigung und Aufnahme von Seiten des Sachverſtändigen Publicums durch ſchnellen Abſatz — nicht auch einen gerechten Anſpruch auf eine der Materie entſprechende Schätzung und Vergeltung von Seiten der, die Wiſſenſchaften und Künſte thätig und eifrig unterſtützenden, StaatsRegierungen machen dürfen? — Sollte man wol darauf würklich rechnen können? —

Erfurt,

gedruckt, bei Johann Philipp Chriſtian Reuß. 1060 [1800.]

Vorzunehmende Verbeſſerungen.

Durch S. Z. v. o; v. u. wird angedeutet: Seite, Zeile, von oben, von unten.

Ort	Fehler	Verbeſſerungen
S. 4. Z. 5. v. o.	Umkreiſe	Umkreiße
S. 4. Z. 11. v. o.	Umkreiſe wirklich	Umkreiße würklich
S. 4. Z. 16. v. o.	ſeyn	ſein
S. 4. Z. 3. v. u.	Schleyer	Schleier
S. 4. Z. 5. v. u.	ſey	ſei
S. 5. Z. 1. v. u.	Umkreiſe	Umkreiße
S. 6. Z. ε. v. o.	und	oder
S. 6. Z. 13. v. o.	Obgleich ſich ein	obgleich ein
S. 7. Z. 6. v. o.	Weiße	Weiſe
S. 8. Z. 3. v. o.	Zweife	Zweifel
S. 8. Z. Q. v. u.	$\delta x (1-x^2)-\frac{1}{2}$	$\delta x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
S. 9. Z. Q. v. o.	meine	meiner
S. 9. Z. 2. v. u.	bewieſen	beweißen
S. ε. Z. 4. v. u.	Narren-Haus	NarrenHaus.
S. ε. Z. 6. v. u.	ſchreyen	ſchreien
S. Q. Z. 15. v. o.	ſey	ſei
S. 10. Z. 4. v. o.	zwey	zwei
S. 10. Z. 5. v. o.	Lebenszeit	LebensZeit
S. 11. Z. 6. v. u.	Dreyecke	Dreiecke
S. 12. Z. 6. v. o.	$: r$	r^{-1}
S. 13. Z. 1. v. o.	$\frac{\omega \cos \alpha}{r}$	$\frac{w \cos \alpha}{r}$
S. 13. Z. 6. v. o.	vor	von
S. 13. Z. 3. v. u.	$\frac{\cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha \sin \alpha^2}{r}$	$\frac{\cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha \sin \alpha^2}{r^2}$
S. 13. Z. 10. v. u.	r^2	r^{-2}
S. 15. Z. 4. v. u.	$] [\frac{4 \cos \alpha^3 - 3 r^2 \cos \alpha}{r}$	$]. [\frac{4 \cos \alpha^3 - 1^2 \cos \alpha}{r^3}]$
S. 18. Z. 14. v. o.	des Bogens] r	des einfachen Bogens
S. 25. Z. 11. v. o.	$16 a^6$	$14 a^6$
S. 27. Z. 4. v. o.	$\frac{638}{2.3.4.5}$	$\frac{693}{2.3.4.5}$

Ort

Ort	Fehler	Verbeſſerungen
S.27. Z.9. v. o.	$\xi = \frac{\varepsilon.9.9}{\varepsilon.\varrho};\ \vartheta = \frac{\xi.\varrho.\varrho}{10.11}$	$\zeta = \frac{\varepsilon.9.9}{\varepsilon.\varrho};\ \vartheta = \frac{\zeta.\varrho.\varrho}{10.11}$
S.28. Z.2. v. o.	ξ	ζ
S.28. Z.10. v. o.	-4288β	-4200β
S.28. Z.11. v. o.	$-7\varepsilon 2340\varepsilon$	$-7\varepsilon 2340.\varepsilon$
S.28. Z.2. v. u.	2. 3. 4. 5. 6	2. 3. 4. 5. 6. 7
S.2ε. Z.ε. v. o.	$(\sin\beta) : r^{-1}$	$(\sin\beta)\, r^{-1}$
S.2ϱ. Z.3. v. u.	$\frac{r \tan}{\sqrt{(r^2 - \tan\alpha^2)}}{}'$	$\frac{r \tan\alpha}{\sqrt{(r^2 - \tan\alpha^2)^3}}$
S.31. Z.11. v. o.	ein achen	einfachen
S.32. Z.5. v. o.	$+\xi e^{=}$	$+\zeta e^{\varrho}$
S.32. Z.8. v. o.	e^9 &c.	e^{ϱ} &c.
S.34. Z.ε v. o	$\left(\frac{b}{2}\right)\frac{n+6}{2}$	$\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{n+6}{2}}$
S.34. Z.5. v. u	$\frac{2\ 1.\ 3\ 5}{2.4.6.8}$	$\frac{2.1.3.5}{2.4.6.8}$
S.35. Z.8. v. o.	$+2\zeta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$	$+2\zeta\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{\varrho}{2}}$
S.36. Z.9. v. o.	$+\frac{14.1.3}{2.\ 4}\beta \mid +\frac{14.1.3.1}{2.\ 4.\ 6}\beta$	$-\frac{14.1.3}{2.\ 4}\beta \mid -\frac{14.1.3.1}{2.\ 4.\ 6}\beta$
S.36. Z.ε. v. o.	$+\frac{54.\ 5.3}{2.\ \ 4}\gamma$	$-\frac{54.}{2.}\frac{5.3}{4.}\gamma$
S.37. Z.2. v. o.	$-2\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{}{2}}$	$-2\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$
S.37. Z.5. v. o.	Querſinus	Quercoſinus
S.37. Z.2. v. u.	$+\frac{e^7}{7}+\frac{e^9}{9}+\frac{e^{\varrho}}{\varrho}$	$-\frac{e^7}{7}+\frac{e^9}{9}-\frac{e^{\varrho}}{\varrho}$
S.38. Z.ε. v. o.	$\frac{(4s+1)-(4s+1)}{(4s+1)\ \ (4s+3)}$	$\frac{(4s+3)-(4s+1)}{(4s+1)\ \ (4s+3)}$
S.39. Z.7. v. o.	wáre wenn	wáre, wenn
S.39. Z.10. v. o.	ſei wenn	ſei, wenn
S.3ε. Z.1. v. o.	$+\zeta\alpha$	$\zeta\alpha^{\varrho}$
S.3ϱ. Z.2. v. o.	$+\varrho 480\cdot\varepsilon + 10\delta + \ 0\beta\gamma$	$+[\varrho 480.\varepsilon + 10\delta + 20\beta\gamma$
S.41. Z.2. v. o.	fehlt: da coſec $\alpha = g = \sin\alpha^{-1} = a^{-1}$, ſo iſt	
S.43. Z.7. v. o.	$\frac{40-614-1\varepsilon00}{2.\ 3\ \ldots\ \varrho.\ 10}$	$-\frac{40+614+1\varepsilon00}{2.\ 3\ \ldots\ \varrho.\ 10}$

Ort	Fehler	Verbeſſerungen
S. 43. Z. 2. v.u.	$1.2.3....(4s-2)$	$1.2.3....(4s)$
S. 44. Z. 4. v.o.	$-\frac{\alpha^{4s-1}}{1.2.3...(4-3)(4s-2)}$	$-\frac{\alpha^{4s-2}}{1.2.3...(4s-3)(4s-2)}$
S. 46. Z. 9. v.o.	$(\frac{b}{2})^{4s+1}$	$(\frac{b}{2})^{4s+1}$
S. 46. Z. 6. v.u.	$\frac{\alpha 4s+1}{1.2.3...(4s+1)}$	$\frac{\alpha^{4s+1}}{1.2.3....(4s+1)}$
S. 48. Z. 1. v.o.	$+\frac{\omega^8}{1.2.3...8}$	$-\frac{\omega^8}{1.2.3...8}$
S. 49. Z. 10 v.o.	α von	α, oder von
S. 49. Z. 6. v.u.	ſtatt	Statt
S. 4E. Z. 2 v.o.	$+\ \beta\ \varepsilon$	$+\ 2\ \beta\ \varepsilon$
S. 4E. Z. 8. v.o.	a	a^6
S. 4E. Z. 9. v.o.	$+\ 10\ \beta^2$	$+\ 10\ \beta^2\ \gamma$
S. 50. Z. 7. v.u.	9. β^3	.9. $(\beta^3$
S. 51. Z. 1. v.o.	n	n^9
S. 51. Z. 2. v.o.	$-\frac{n(^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3.}$	$-\frac{n(n^2-1^2)}{1.\ 2.\ 3}$
S. 51. Z. 4. v.u.	$+\frac{n(-1)}{1.\ 2.}$	$+\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}$
S. 52. Z. 8. v.o	fehlt ganz vorn a^9	
S. 52. Z. 7. v.u.	$\frac{(n+3)}{4.}$	$\frac{(n-3)}{4}$
S. 53. Z. 4. v.o.	$(1-a^2)^{\frac{n-3}{2}}$	$(1-a^2)^{\frac{n-5}{2}}$
S. 54. Z. 4. v.u.	$-\frac{10}{2.3....10}$	$-\frac{\alpha^{10}}{2.3....10}$
S. 55. Z. 2. v.o.	wurden	wurde
S. 55. Z. 8. v.o.	nach Zeile 8. v. o. fehlt ganz 70)	
S. 56. Z. 9. v.o.	— n.	n^2.
S. 56. Z. 9. v.o.	fehlt vorn: 71)	
S. 57. Z. 2. v.o.	$..\varepsilon(\gamma+$	$..\varepsilon(\gamma^2+$
S. 59. Z. 8. v.o.	+	+
S. 59. Z. 2. v.u.	$\frac{n^2\ n^2-2^2)}{2.\quad 4.}$	$\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\quad 4}$
S. 60. Z. 10. v.u.	finden.	finden, ein.
S. 61. Z. 11. v.o.	$+\frac{n^2(-2^2)}{2.\ 3.\ 4}a^4-\frac{n^2}{2.}\ \frac{(n-2^2)(n-4^2)}{3.\ 4.\quad 5.\ 6}a^6$	$+\frac{n^2(n^2-2^2)}{2.\ 3.\ 4}a^4-\frac{n^2}{2.}\ \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{3.\ 4.\quad 5.\ 6}a^6$
S. 63. Z. 1. v. u.	] &c.	&c.]

Ort	Fehler	Verbeſſerungen
S.67. Z.6. v.o.	$\frac{m^2 1^2.(-m-u)^2)}{2. \quad 3.}$	$\frac{(m^2 1^2-(m-u)^2)}{2. \quad 3}$
S.67. Z.12. v.o.	BerechnungsWeiße	BerechnungsWeiſe
S.69.u. nicht 96		
Z.9. v.u.	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4^9}$
S.73. Z.3. v.o.	7 m.	7 . . . .
S.79. Z.5. v.o.	$(b-b^2)^3$	$(2b-b^2)^2$
S.79. Z.2. v.o.	$-4c+2$	$+4c+2$
S.80. Z.10. v.o.	$\frac{(2^2n^2-4)}{5.\ 6}$	$\frac{(2^2n^2-4^2)}{5.\ 6}$
S.80. Z.11. v.o.	$\frac{(2^2n^2-6)}{7.\ 8.}$	$\frac{(2^2n^2-6^2)}{7.\ 8.}$
S.86. Z.8. v.u.	$\frac{(n-4s+4)}{(4s+2)}$	$\frac{(n-4s+4)}{(4s-2)}$
S.87. Z.7. v.u.	$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^5$	$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^s$
S.87. Z.8. v.u.	$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^6$	$\left(\frac{b}{2m^2}\right)^s$
S.88. Z.7. v.o.	ſtreiche aus: zu	
S.88. Z.12. v.o.	$\frac{(2^2n^2-8)}{9.\ 10}$	$\frac{(2^2n^2-8^2)}{9.\ 10}$
S.89. Z.8. v.o.	$a^{9\,4s-1}$	a^{4s-1}
S.89. Z.5. v.o.	$\frac{(n-1)}{3}$	$\frac{(n-2)}{3}$
S.90. Z.7. v.o.	$\frac{(n-2)}{3.\ 4.}$	$\frac{(n^2-2^2)}{3.\ 4.}$
S.91. Z.1. v.o.	e	e^8
S.91. Z.2. v.o.	$\frac{(n^2-2)}{2}$	$\frac{(n-2)}{2}$
S.92. Z.9. v.o.	fehlt ganz vorn: — $n\alpha = 1\ (1$	$n\alpha = 1 - (1$
S.92. Z.8. v.u.	$\frac{(n-4s-3)}{(4s-2)}$	$\frac{(n-4s+3)}{(4s-2)}$
S.93. Z.3. v.o.	$+e^2)^n$	$+e^2)^{\frac{n}{2}}$
S.94. Z.8. v.o.	$-6e+$	$-6e^2+$
S.94. Z.12. v.o.	$-7e^7$	$-8e^7$
S.94. Z.3. v.u.	$+f^{2-\frac{n}{2}}$	$+f^2)^{-\frac{n}{2}}$

Alle übrigen eingeſchlichenen DruckFehler wird der Sachverſtändige leicht ſelbſt zu verbeſſern wiſſen.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Werneburg, Johann Friedrich Christian,

Rein wissenschaftliche Deduction der wahren Verhältnisse je zweier von den verschiedenen trigonomete Linien zu einander

S.l. 1800

Math.p. 636 n
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083085-2
VD18 14652463-002